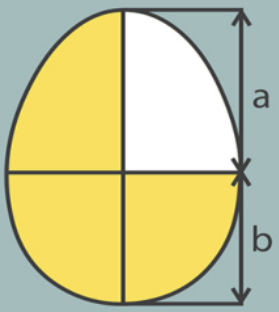
Математическое мышление



Книга для родителей и учителей

Джо Боулер

SHOUT
SHARE
IT

Annotation

Математика может учить логике только тогда, когда преподавание включает творческий подход к решению интересных задач. Эта книга для тех, кто хочет обучать математике так, чтобы у учеников горели глаза.

- Джо Боулер
  - Информация от издательства
  - Предисловие
  - Сила мышления
  - Глава 1. Мозг и изучение математики
  - Глава 2. Сила ошибок и трудностей
  - Глава 3. Творчество и красота в математике
  - Глава 4. Формирование математического мышления: гибкий подход к работе с числами
  - Глава 5. Содержательные математические задачи
  - Глава 6. Математика и путь к равенству
  - Глава 7. От деления по уровню успеваемости к делению с ориентацией на мышление роста
  - Глава 8. Оценка для мышления роста
  - Глава 9. Преподавание математики, ориентированное на мышление роста
  - Источники
  - Приложение
  - Об авторе
  - МИФ Кругозор
  - Над книгой работали
- notes
  - 1
  - 2
  - 3
  - 4
  - 5
  - 6
  - 7
  - 8
  - 9
  - 10
  - 11
  - 12
  - 13
  - 14

- ○ 15
- ○ 16
- ○ 17
- ○ 18
- ○ 19

Джо Боулер
Математическое мышление. Книга для родителей и учителей

Информация от издательства

Публикуется с разрешения Taryn Fagerness Agency и Synopsis Literary Agency

Возрастная маркировка в соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ: 16+

Боулер, Джо

Математическое мышление. Книга для родителей и учителей / Джо Боулер; перевод с английского Натальи Яцюк. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2019.

ISBN 978-5-00100-891-0

Математика — это не тоскливые цифры и заученные формулы. Математика — это логика. А логика — это творческий подход к решению интересных задач. Джо Боулер, профессор Стэнфорда, делится своими наработками, позволяющими каждому почувствовать в себе математические способности.

Эта книга для тех, кто хочет обучать математике так, чтобы у учеников горели глаза.

Все права защищены.

Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

© Jo Boaler, 2016

© Перевод на русский язык, издание на русском языке, оформление. ООО «Манн, Иванов и Фербер», 2019

Предисловие

Одна из моих бывших студенток из Стэнфордского университета работает учительницей четвертого класса в районе Нью-Йорка под названием Южный Бронкс. Там много учеников из числа нацменьшинств, не имеющих полноценного доступа к образованию и плохо успевающих в школе. Ученики моей знакомой сплошь считают, что у них нет способностей к математике. Если взглянуть на их успеваемость в прошлом, может показаться, что это и правда так. Однако после года работы с этой учительницей ее класс стал лучшим четвертым классом в штате: 100% учеников сдали тест по математике, причем 90% получили высшие баллы. И это лишь один из множества примеров того, что все могут освоить математику.

Кто-то всерьез считает, что некоторые дети не способны заниматься математикой, что успеха в этой науке могут добиться только те, кого считают умными, или что детям, у которых не было надлежащих условий, слишком поздно изучать ее. Тогда вполне понятно, почему многие школьники плохо усваивают математику и ненавидят ее. Но мы обнаружили, что многие учителя даже утешают своих учеников и советуют им не беспокоиться о плохих оценках по математике, поскольку не каждому дано в ней преуспеть. Взрослые (и родители, и учителя) разрешают детям поставить крест на математике, едва те начнут изучать ее. Неудивительно, что многие игнорируют плохие оценки по этому предмету, заявляя: «Математика — это не мое».

Почему же родители, учителя и ученики порой думают, что математика — удел избранных? Результаты недавнего исследования показывают, что это очень расхожее мнение. Исследователи опросили ученых (из американских университетов), работающих в разных областях. Их попросили оценить, насколько успех в их области зависит от врожденных способностей и от тех, которые можно развить с помощью упорного труда, целеустремленности и накопления знаний. Из всех специалистов по естественным наукам именно математики особенно часто подчеркивали роль врожденных способностей (Leslie, Cimpian, Meyer, & Freeland, 2015). Другие исследователи обнаружили, что многие преподаватели математики начинают свои курсы с разделения учащихся на тех, у кого есть способности, и тех, у кого их нет. Один преподаватель колледжа в первый же день вводного курса и вовсе сказал: «Если вам сложно, значит, вам здесь не место» (Murphy, Garcia & Zirkel, неопубл.). Эта идея передается из поколения в поколение; неудивительно,

что дети и подростки боятся математики. Неудивительно и то, что при первых же трудностях они решают, будто не созданы для математики.

Но появляются и доказательства того, что большинство учеников (возможно, почти все) способны преуспевать в математике и получать удовольствие от нее. Что же предпринять, чтобы ее изучение стало доступным для всех? Как помочь всем поверить в то, что математические способности можно развить, и показать учителям подход, который позволит воплотить эту убежденность в жизнь? Именно об этом пойдет речь в данной книге.

В этой уникальной, замечательной книге Джо Боулер — опытный и глубоко эрудированный специалист — покажет учителям, как описывать математическую работу, структурировать математические задачи, направлять учеников в процессе решения задач и обеспечивать обратную связь, чтобы помочь им сформировать мышление роста и сохранить его навсегда. Джо из тех редких выдающихся педагогов, которые не только знают секрет эффективного преподавания, но и могут поделиться им. У Джо учились тысячи преподавателей. И вот что они говорят.

> В школьные годы… меня не покидало ощущение, что я ноль в математике… Не могу описать словами облегчение, которое я испытываю сейчас благодаря тому, что могу не только сам изучать математику, но и объяснить своим ученикам, что им это тоже под силу.
>
> Вы помогли мне поразмышлять над переходом к стандартам Common Core[1], а также над тем, как помочь ученикам развить любовь и интерес к математике.
>
> Я искала метод изучения математики, который изменил бы отношение учеников с неприязни на удовольствие… это именно то, что было мне необходимо.

Представьте себе, как ваши ученики с удовольствием погружаются в решение поистине сложных математических задач. Представьте, как они просят обсудить их ошибки перед всем классом. Представьте, как они говорят: «У меня *есть* способности к математике!» Эта «утопия» реализуется на практике в учебных классах по всему миру. Если вы последуете представленным в данной книге рекомендациям, то и в вашем классе это вполне может произойти.

Кэрол Дуэк,

профессор психологии
и автор книги «Гибкое сознание»[2]

Сила мышления

Я хорошо помню тот осенний день, когда я сидела в кабинете декана в ожидании встречи, которая оказалась очень важной. Накануне я вернулась в Стэнфордский университет из Англии, где работала профессором математики как стипендиат Фонда имени Марии Кюри. Я привыкала к переходу от серого облачного неба, которое было моим неизменным спутником на протяжении трех лет пребывания на побережье Сассекса в Англии, к солнечному свету, почти всегда заливавшему кампус Стэнфорда. В тот день я вошла в кабинет декана с предвкушением: мне предстояло впервые встретиться с Кэрол Дуэк. Я немного волновалась перед встречей со знаменитым исследователем, книги которого коренным образом изменили жизнь людей на разных континентах и работа которого побудила правительства, школы, родителей и даже ведущие спортивные команды изменить подход к жизни и обучению.

Кэрол и члены ее исследовательской команды много лет собирали данные, подтверждавшие очевидное: у каждого человека свой тип мышления, внутреннее убеждение по поводу обучения (Dweck, 2006b). Люди с мышлением роста (установкой на рост) считают, что умственные способности можно развить упорным трудом, а люди с фиксированным мышлением (установкой на данность) убеждены, что можно что-то изучить, но нельзя изменить базовый уровень интеллекта. Тип мышления крайне важен: результаты исследований свидетельствуют, что от него зависит поведение людей в процессе обучения, а также их результаты. Когда ученики меняют установки и начинают верить, что могут подняться на более высокий уровень, они меняют путь обучения (Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007) и добиваются более высоких результатов.

В тот день я спросила Кэрол, хотела бы она поработать с учителями математики и учениками. Ведь иногда очень полезно воздействовать на мышление учеников, а учителя имеют такую возможность постоянно. Кэрол была воодушевлена и подтвердила, что математика — предмет, который больше всего нуждается в изменении мышления. Это была первая из множества наших приятных бесед; в следующие четыре года мы много работали вместе. Сейчас мы трудимся над совместными исследовательскими проектами с участием учителей, знакомим их со своими идеями и результатами исследований в рамках семинаров. Исследования мышления и математики, которыми я занималась в последние годы, помогли мне в полной мере понять

необходимость развития мышления учеников в *контексте* математики, а не в целом. Ученики зачастую так не любят этот предмет, что у них формируются установки на рост в отношении чего угодно, но только не математики. Чтобы изменить такие губительные убеждения, ученикам необходимо развить *математическое мышление*. И эта книга научит вас, как помочь им.

Свойственное многим людям фиксированное мышление в отношении математики в сочетании с другими негативными представлениями о ней ведет к губительным последствиям. Именно поэтому я хочу поделиться в этой книге новыми идеями о математике и обучении. Не так давно я высказала некоторые из них во время онлайн-курса для учителей и родителей (курсы такого типа называют MOOC[3]), и результаты превзошли все мои ожидания (Stanford Center for Professional Development, без даты).

На курс записались более сорока тысяч слушателей, среди которых были учителя всех классов и родители. В конце курса 95% присутствовавших заявили, что благодаря новым знаниям изменят свои методы преподавания или помощи своим детям. Более 65% слушателей решили продолжить обучение (обычно на таких курсах остаются процентов пять).

Прочтя отзывы всех участников, я поняла, что математика для многих оказалась психологической травмой и что эту травму подпитывают ошибочные убеждения по поводу самой науки и своих умственных способностей. В сложности математики убеждены многие.

Впервые о травмирующем воздействии математики я узнала после публикации моей первой книги для родителей и учителей под названием «При чем здесь математика» в США и «Слон в классной комнате» в Великобритании (Boaler, 2015a). В ней подробно описаны изменения, которые необходимо внести в методы преподавания и воспитания, чтобы сделать математику более увлекательной и доступной. После выхода этого пособия меня начали приглашать на многочисленные радиошоу по обе стороны Атлантики, чтобы обсудить тему изучения математики. Это были разные программы: от утренних шоу до серьезного обсуждения с весьма вдумчивым ведущим PBS и короткого выступления во время популярного британского радиошоу под названием «Час женщин». Беседы с радиоведущими — крайне интересный опыт. Сначала я всегда рассказывала об изменениях, которые нам нужны, подчеркивая, что математика травмирует многих. Это как будто помогало ведущим расслабиться, открыться и поделиться своими историями о том же самом. Многие интервью превращались в подобие сеансов психотерапии:

очень квалифицированные и компетентные специалисты говорили о своих страданиях при изучении математики, причиной которых обычно было то, что сказал или сделал учитель. Я до сих пор помню, как Китти Данн из Висконсина рассказала, что название учебника по алгебре навсегда связалось у нее с негативными эмоциями. Радиоведущая BBC Джейн Гарви (поразительная женщина, которой я восхищаюсь) поведала, что боялась брать у меня интервью и что она уже рассказала двум дочерям о своей ужасной успеваемости по математике в школе (а этого ни в коем случае нельзя делать — но об этом чуть позже). Такая сила негативных эмоций по поводу математики не редкость. Эта дисциплина больше, чем любая другая, сокрушает дух учеников так, что даже взрослыми они не могут забыть свои неудачи. Многие ученики решают, что не способны усвоить математику, и питают отвращение к ней на всю жизнь.

И это проблема не только гуманитариев. Мне довелось встретиться с Вивьен Перри. Вивьен — ведущий ученый Англии; не так давно она получила звание офицера ордена Британской империи — самую высокую награду, которую вручает королева. У Вивьен длинный список достижений, в частности работа на посту вице-председателя совета Университетского колледжа Лондона, члена Совета по исследованиям в области медицины, а также ведущей научных телевизионных программ BBC. При всем этом она открыто, во всеуслышание говорит о своем парализующем страхе перед математикой. По словам Вивьен, она даже не может вычислить проценты, когда ей необходимо заполнить налоговые декларации. За несколько месяцев до отъезда из Великобритании и возвращения в Стэнфордский университет я должна была прочесть доклад в Королевском институте в Лондоне. Это огромная честь — выступать в одном из старейших и самых уважаемых британских институтов, поставившем перед собой достойную цель приобщения широкого круга людей к науке. Рождественские лекции, начало которым положил в 1825 году Майкл Фарадей, проводятся в Великобритании каждый год и транслируются по телевидению. Лекции читают выдающиеся ученые, рассказывая о своей работе широкой публике. Я попросила Вивьен представить меня в Королевском институте. И она рассказала присутствующим, как в детстве учительница математики миссис Гласс поставила ее в угол за то, что она не смогла повторить наизусть таблицу умножения на семь. Затем Вивьен рассмешила собравшихся, упомянув, что, когда она поделилась этой историей на BBC, шесть человек позвонили и спросили, не идет ли речь о школе Хоксбери. Вивьен подтвердила их догадку.

К счастью, такие жесткие методы преподавания больше почти не применяются. Меня всегда вдохновляет самоотверженность и ответственность большинства учителей математики, с которыми я работаю. Но многие ученики продолжают терять энтузиазм. Процесс в любой момент можно обратить вспять, но ученики по-прежнему получают много косвенных сигналов по поводу своих способностей: в контексте вопросов, над которыми они работают на уроках, обратной связи, способов деления на группы и прочее.

Вивьен убеждена, что страдает заболеванием мозга под названием дискалькулия. Но мы уже знаем, что единичное событие или единичный сигнал может изменить все в жизни (Cohen & Garcia, 2014). Вероятно, именно негативный опыт в математике лежит в основе тревоги, с которой она борется теперь каждый день. К счастью, Вивьен добилась успеха (даже в области точных наук). Однако большинству людей повезло меньше, и губительный опыт неудач, который они получили в раннем возрасте, закрыл для них многие двери на всю оставшуюся жизнь.

Изучать математику очень важно. Результаты научных исследований свидетельствуют: чем больше математических дисциплин изучают дети, тем выше их заработок через десять лет после окончания средней школы; причем «продвинутые» курсы обеспечивают повышение заработной платы на 19,5% (Rose & Betts, 2004). В ходе этих исследований было установлено, что те, кто изучал высшую математику, осваивают разные методы работы и мышления, повышающие их эффективность. Ученики, изучающие сложные математические дисциплины, лучше ориентируются в математических ситуациях; на работе их продвигают на более ответственные и высокооплачиваемые должности по сравнению с теми, кто не изучал математику на таком уровне (Rose & Betts, 2004). Во время исследования в английских школах я выяснила, что такие ученики получают повышение и более высокооплачиваемую работу, потому что в средней школе они изучали математику в рамках проектно-ориентированного подхода (Boaler, 2005).

Есть много книг, посвященных тому, как преодолеть страх математики (Tobias, 1978). Но негативное отношение к этой дисциплине объясняется не только пагубными методами преподавания. Существует очень мощная идея: якобы не все могут добиться успеха в этой науке, она «дар» для избранных.

Откуда же пошла эта губительная идея? Уж точно не из стран типа Японии, занимающих первые места в мире по уровню знания математики. Две мои дочери на момент написания книги учились в третьем и шестом классах средней школы в Калифорнии. И я имею сомнительное удовольствие регулярно просматривать

телепередачи для подростков. Весьма познавательно (и тревожно): не проходит ни дня, чтобы математику не подавали там в негативном свете. О ней говорят как о трудном, неинтересном и недоступном предмете, который предназначен только для «заучек», а не для неординарных, интересных людей. И уж точно она не для девочек. Неудивительно, что многие школьники теряют интерес к этому предмету и считают, что не могут успешно освоить его.

Мысль о том, что математика доступна только избранным, глубоко укоренилась в психике большинства. Причем против других дисциплин таких предубеждений нет. Многие скажут, что математика выделяется на общем фоне, поскольку в ней ответы могут быть только правильными и неправильными. Но это ошибка. В математике есть место творчеству и интерпретациям. Это широкая и многоплановая дисциплина, которая требует логических рассуждений, изобретательности, установления связей и интерпретации методов. Это совокупность идей, позволяющих пролить свет на устройство мира. Это наука, которая постоянно меняется. К любой математической задаче можно подойти разными способами, и воспринимать математику тоже можно по-разному. Когда произойдут перемены, люди начнут интересоваться математикой и любить ее.

Вот еще одна распространенная ошибка: якобы заниматься математикой могут только самые умные. И поэтому неудачи в этой области оказывают на учеников особенно тягостное воздействие: они приходят к выводу, что глупы и не способны добиться серьезного успеха в жизни. Нужно развеять этот миф.

Пока я писала книгу, появились первые знаки того, что мир начинает ценить и понимать важность гибкого мышления. Книга Кэрол Дуэк переведена более чем на 20 языков (Дуэк, 2013), интерес к теме мышления растет. И идеи Кэрол распространяются на восприятие математики. Преподаватели этой дисциплины и родители, занимающиеся с детьми дома, могут радикально изменить представления, опыт и шансы учеников, если применят к изучению математики подход, основанный на мышлении роста. Общее воздействие на установки поможет изменить мышление. Но стоит лишь вернуться к прежним методам, и установка роста постепенно утратит свою силу. Я говорю преподавателям и родителям, я подчеркиваю и в этой книге: нужно сосредоточиться на математических вопросах и заданиях, над которыми работают ученики. Я опишу методы поощрения и оценки учеников, способы разделения на группы в классах, методы работы над ошибками, правила работы на уроке, сигналы в отношении математики, которые мы можем подавать ученикам, и стратегии ее изучения,

которые легко освоить, — в общем, все аспекты преподавания и изучения этого предмета. Я рада поделиться своими идеями и убеждена, что они помогут вам и всем, с кем вы занимаетесь математикой.

В главе 1 представлены интересные и важные идеи, рожденные в рамках исследований за последние годы. Далее основное внимание уделяется стратегиям, которые можно использовать на уроках математики и дома, чтобы реализовать на практике идеи первых двух глав. Я настоятельно рекомендую прочесть все главы: переход непосредственно к стратегиям не принесет пользы без глубокого понимания базовых идей.

За несколько месяцев после того, как состоялся мой онлайн-курс МООС для учителей и родителей, я получила тысячи бумажных и электронных писем и других сообщений. Люди рассказывали, что они изменили на уроках и дома и как это повлияло на учеников. Небольшие вроде бы перемены в преподавании и воспитании способны изменить отношение детей к математике: ведь новые знания о головном мозге, мышлении и изучении этого предмета поистине революционны. В этой книге идет речь о формировании *математического мышления* в рамках нового подхода к преподаванию и воспитанию, суть которого сводится к развитию, инновациям, творчеству и реализации математического потенциала. Спасибо, что присоединились ко мне и встали на путь, который навсегда изменит ваши отношения и отношения ваших учеников с математикой.

Глава 1. Мозг и изучение математики

За прошедшее десятилетие появилось множество технологий, которые обеспечили новые возможности изучения функций разума и мозга. Сейчас ученые могут наблюдать, как дети и взрослые работают над решением математических задач, и регистрировать активность их головного мозга; отслеживать процесс его роста и дегенерации, а также влияние различных эмоциональных состояний на его активность. В последние годы сформировалась область исследований, которая изучает так называемую пластичность мозга. Результаты в этой области поразили ученых. Раньше считалось, что мозг, данный человеку от рождения, нельзя изменить, но теперь эта гипотеза решительно опровергнута. Многие исследования продемонстрировали невероятную способность головного мозга расти и меняться за достаточно короткий период (Abiola & Dhindsa, 2011; Maguire, Woollett, & Spiers, 2006; Woollett & Maguire, 2011).

Когда мы узнаем новую идею, в нашем мозге возникает электрический сигнал, который проходит через синапсы и соединяет различные участки мозга.

Если вы глубоко изучаете какой-то предмет, активность синапсов создает устойчивые связи в головном мозге, формируя структурные пути. Но, если вы ознакомитесь с идеей только раз или изучите ее поверхностно, синаптические связи могут растаять, как следы на песке. Синапсы активизируются в процессе обучения, но он происходит не только на уроках или во время чтения книг. Они возбуждаются, когда мы разговариваем, играем, собираем конструктор и занимаемся многими другими видами деятельности.

Ряд открытий, под влиянием которых ученые изменили свое мнение о способностях и обучении, были сделаны в процессе исследований роста головного мозга, зафиксированного у водителей лондонского такси. Я родом из Англии и много раз ездила в Лондоне на такси. У меня остались теплые детские воспоминания об увлекательных однодневных путешествиях в Лондон с семьей — мы жили в нескольких часах езды от города. Потом я училась и работала в Королевском колледже Лондонского университета и тогда гораздо чаще совершала поездки по городу на такси. В Лондоне много таксомоторных компаний, но истинная «королева» — Black Taxi, или Black Cab.

В ходе большинства поездок по Лондону на такси Black Cab я

и не задумывалась, насколько высок уровень квалификации водителей. Оказывается, чтобы стать водителем Black Cab, кандидатам необходимо пройти курс обучения продолжительностью от двух до четырех лет, в течение которого они должны запомнить 25 тысяч улиц и 20 тысяч объектов в радиусе 40 километров от перекрестка Чаринг-Кросс. Научиться ориентироваться в Лондоне гораздо сложнее, чем в большинстве американских городов: сеть лондонских улиц не имеет четкой структуры и включает тысячи переплетающихся друг с другом, взаимосвязанных улиц.

В конце обучения водители Black Cab сдают тест по курсу, названный просто и элегантно — «Знание». Если во время поездки в лондонском Black Cab вы спросите водителя об этом курсе, он с удовольствием расскажет вам, насколько труден как сам тест, так и весь процесс обучения. «Знание» известен как один из самых сложных в мире курсов; в среднем кандидаты сдают экзамен с двенадцатого раза.

В первое десятилетие XXI века ученые решили исследовать водителей Black Cab на предмет изменений, которые происходят в их головном мозге в процессе обучения пространственной ориентации. Но они не ожидали настолько впечатляющих результатов. Оказалось, что к концу периода обучения гиппокамп водителей такси существенно увеличился (Maguire et al., 2006; Woollett & Maguire, 2011). Гиппокамп — область мозга, отвечающая за хранение и обработку пространственной информации.

В ходе других исследований ученые сравнили рост мозга водителей Black Cab с ростом мозга водителей лондонских автобусов, которые изучают только простые единичные маршруты. По результатам исследования было установлено, что у этих водителей не наблюдается такого роста головного мозга (Maguire et al., 2006). Это подтвердило вывод ученых о том, что именно необычайно сложное обучение водителей такси становится причиной поразительного роста их головного мозга. В ходе дальнейших исследований ученые обнаружили, что после выхода водителей Black Cab на пенсию их гиппокамп снова уменьшается в объеме (Woollett & Maguire, 2011).

Многочисленные исследования с участием водителей Black Cab (Maguire et al., 2006; Woollett & Maguire, 2011) продемонстрировали уровень гибкости, или пластичности головного мозга, поразивший ученых. Ранее они считали, что такое невозможно. Все эти открытия привели к тому, что научный мир изменил свое мнение об обучении, способностях и возможностях изменений и роста мозга.

Примерно в то же время, когда проводились исследования с участием водителей Black Cab, произошло событие, которое еще больше потрясло научный мир. У девятилетней Кэмерон Мотт были припадки, которые медики не могли контролировать. Лечащий врач девочки Джордж Джелло предложил радикальную меру. Он пришел к выводу, что необходимо удалить половину ее головного мозга: все левое полушарие. Это была революционная операция, которая прошла успешно. Несколько дней после операции Кэмерон была парализована. Врачи считали, что она будет оставаться в таком состоянии много лет. Но прошло несколько недель, а потом и месяцев — и девочка поразила врачей восстановлением функций. Это могло значить только одно: в правом полушарии головного мозга сформировались связи, необходимые для выполнения функций левого полушария. Врачи отнесли это на счет невероятной пластичности головного мозга и могли объяснить случившееся только тем, что на самом деле произошла регенерация мозга девочки. Процесс формирования нового мозга проходил быстрее, чем врачи могли себе представить. Сейчас Кэмерон бегает и играет вместе с другими детьми, а легкая хромота — единственный признак утраты значительной части мозга[4].

Новые данные о том, что головной мозг может расти, адаптироваться и меняться, потрясли научный мир и повлекли множество новых исследований и обучения с использованием новых технологий и оборудования для сканирования мозга. В ходе исследования, крайне интересного для работников сферы образования, специалисты Национального института психического здоровья давали участникам упражнение, над которым те должны были работать по 10 минут каждый день на протяжении трех недель. Затем исследователи сравнили мозг тех, кто выполнял упражнение, с мозгом тех, кто этого не делал. Выяснилось, что в головном мозге участников исследования, которые работали над упражнением, произошли структурные изменения. Он «перепрограммировался» и увеличился в объеме под воздействием 10-минутного задания, которое они выполняли каждый день на протяжении 15 дней (Karni et al., 1998). Эти результаты должны подтолкнуть педагогов к отказу от устоявшихся представлений о мозге и обучении, которые сейчас распространены в школе: мол, ученики бывают умными и глупыми, сообразительными и бестолковыми. Если мозг способен измениться за три недели, представьте себе, что может произойти за год изучения математики, если ученики получают нужный материал по этому предмету и позитивные отклики о своих потенциале и способностях. В главе 5 мы поговорим о структуре

лучших математических задач, над которыми должны работать ученики, чтобы их мозг развивался.

Новые данные, полученные по результатам исследований головного мозга, свидетельствуют: при грамотном преподавании и наличии толковой обратной связи каждый ученик может успешно освоить математику и добиться самого высокого уровня успеваемости в школе. У некоторых детей действительно есть специфические образовательные потребности, затрудняющие изучение математики. Но подавляющему большинству (95%) доступны все уровни школьного курса. Родители и учителя должны знать это. Когда я рассказываю об этих результатах исследований во время семинаров и презентаций, это вдохновляет и стимулирует большинство учителей. Но не всех. Недавно я работала с группой учителей, и у одного преподавателя математики из средней школы эта идея вызвала явное беспокойство. Он сказал: «Вы же не будете утверждать, что любой шестиклассник моей школы сможет изучать дифференциальное и интегральное исчисление в двенадцатом классе?» Я ответила: «Буду». Тот учитель был по-настоящему встревожен этой идеей — хотя, надо отдать ему должное, он не отверг ее сразу. Некоторым трудно принять тот факт, что кто угодно может освоить математику на достаточно высоком уровне, особенно если они много лет решали, кто может заниматься ею, а кто нет, и обучали детей в соответствии с этим убеждением. Безусловно, с самого рождения многие дети получили достаточно впечатлений и сигналов в отношении математики, из-за которых оказались в числе отстающих и могли дойти до шестого класса с меньшим объемом математических знаний по сравнению с другими учениками. Но это не значит, что такие ученики не могут ускорить свое развитие и выйти на более высокий уровень. Они способны сделать это при условии качественного преподавания и поддержки, которой заслуживают все дети.

Меня часто спрашивают, действительно ли я думаю, что всем от рождения дан одинаковый мозг. Нет, я такого не утверждаю. Я говорю о том, что врожденные особенности детей далеко не так важны, как рост их мозга на протяжении всей жизни. Многие твердо убеждены, что наш потенциал зависит от того, что нам дано от рождения, и приводят в пример известных людей, которых считают гениями: Альберта Эйнштейна или Людвига ван Бетховена. Но сейчас ученым известно, что опыт обучения, который мы накапливаем с рождения, затмевает любые врожденные особенности мозга (Wexler in Thompson, 2014). Синапсы возбуждаются в головном мозге каждую секунду, и ученики, которые росли в стимулирующей среде и получали

сигналы о мышлении роста, могут всё. Особенности мозга порой с самого начала дают некоторым людям более благоприятные условия, но лишь немногим природой дано то, что на всю жизнь обеспечит им преимущество. Именно те люди, которых принято считать гениальными от рождения, часто подчеркивают, как упорно они трудились и сколько ошибок совершили. Эйнштейн — пожалуй, самый известный ученый из тех, кого считают гениями, — научился читать только в девять лет и часто говорил, что его достижения рождены ошибками, которые он совершил, и упорством, которое он проявлял. Он относился к работе и жизни как человек с мышлением роста. Многие научные данные подтверждают, что основой успехов или неудач становятся не врожденные умственные способности, а подход к жизни, обратная связь и имеющиеся возможности обучения. Самые благоприятные условия формируются тогда, когда ученики верят в себя. В школе слишком многие сталкиваются с трудностями в изучении математики, получая такие сигналы о своем потенциале, которые заставляют их поверить в то, что они хуже остальных или у них нет таких способностей, как у других. Представленная в данной книге информация поможет и учителям, и родителям внушить детям уверенность в себе, которая им необходима, и вывести их на путь, который приведет их к математическому мышлению, каким бы ни был их предыдущий опыт. Этот путь подразумевает изменение отношения учеников к себе и смену подхода к изучению математики.

Да, мозг у всех разный. Но, в отличие от многих, я считаю, что математического склада ума или математического таланта не существует. Никто не рождается ни со знанием математики, ни без способности изучать ее. К сожалению, идеи об одаренности очень живучи. Не так давно исследователи проанализировали, насколько преподаватели высших учебных заведений убеждены в том, что для изучения их предметов (тридцать в общей сложности) необходима одаренность, и пришли к поразительным выводам (Leslie, Cimpian, Meyer, & Freeland, 2015). Именно преподаватели математики более всех убеждены в том, что их предмет доступен не каждому. Кроме того, исследователи пришли к выводу, что чем больше в той или иной области ценится одаренность, тем меньше в ней женщин со степенью доктора наук, а также что есть корреляция между убеждениями, свойственными соответствующей области, и представленностью женщин в ней. Меньшее число женщин в тех областях, где сильна вера в природную одаренность, объясняется тем, что до сих пор широко распространены стереотипы о том, кто действительно может заниматься математикой (подробнее об этом см. в главе 6).

Нам стоит придерживаться более справедливых и просвещенных взглядов на изучение математики в своих беседах и занятиях с учениками. Работа с учениками должна опираться на новую науку о мозге; нам стоит внушать всем мысль о том, что освоить математику может каждый, а не только тот, кого считают одаренным. Это откроет путь к иному будущему — в котором психологическая травма в связи с изучением математики останется в прошлом, а ученики из разных слоев общества получат доступ к возможностям качественного ее изучения.

В ходе исследований Кэрол Дуэк и ее коллег было установлено, что примерно у 40% детей отмечается пагубное фиксированное мышление и они убеждены, будто интеллект — дар, который «либо есть, либо нет». 40% учеников свойственно мышление роста, а оставшиеся 20% демонстрируют признаки обоих типов мышления (Dweck, 2006b). Ученики с фиксированным мышлением чаще легко сдаются, а ученики с мышлением роста продолжают трудиться, даже если им приходится постоянно выполнять нелегкую работу, демонстрируя при этом качество, которое Анджела Дакворт называет твердостью характера (Duckworth & Quinn, 2009). В ходе одного исследования учеников седьмого класса был проведен опрос для определения типа мышления. Потом исследователи на протяжении двух лет отслеживали успеваемость этих учеников по математике. Результаты оказались впечатляющими: успеваемость учеников с фиксированным мышлением оставалась на прежнем уровне, а у учеников с мышлением роста она постоянно повышалась (Blackwell et al., 2007; рис. 1.1).

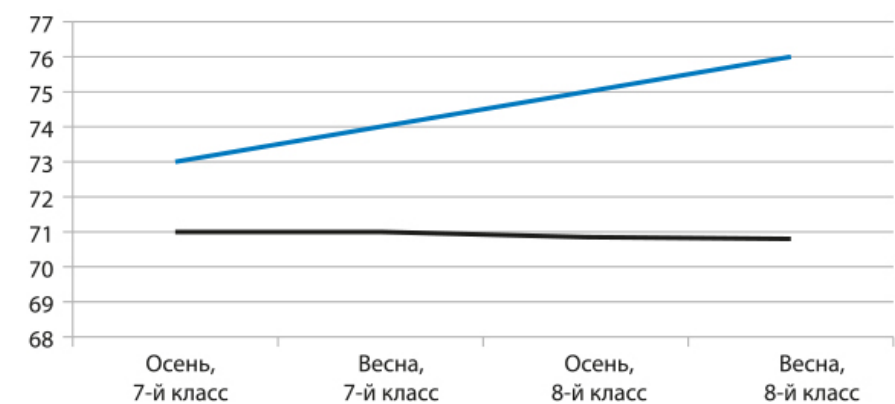


Рис. 1.1. Ученики с мышлением роста опережают в математике учеников с фиксированным мышлением

Источник: Blackwell et al., 2007.

В ходе других исследований ученые показали, что фиксированное мышление у детей (и взрослых) может трансформироваться в мышление роста. Когда это происходит, их подход к обучению становится гораздо более позитивным и успешным (Blackwell et al., 2007). Кроме того, получены новые данные (подробнее см. главу 2) о том, что, когда ученики с мышлением роста совершают ошибки, активность их мозга более позитивна; при этом у них активизируется больше участков мозга, они уделяют больше внимания ошибкам и исправляют их (Moser, Schroder, Heeter, Moran, & Lee, 2011).

Мне не нужны были другие доказательства важности помощи детям (и взрослым) в развитии мышления роста, в частности в математике. Но недавно мне довелось работать в Париже вместе с членами команды PISA[5] (программы Организации экономического сотрудничества и развития, ОЭСР) над анализом поразительного объема данных о 13 миллионах учащихся из разных стран. Команда PISA проводит международные тесты раз в четыре года, а их результаты публикуются информационными агентствами во всем мире. В США результаты тестов часто вызывают тревогу — и не без оснований. По итогам последнего (на момент написания книги) теста США заняли 36-е место по уровню знаний в математике среди 65 стран — членов ОЭСР (PISA, 2012). Подобно многим другим итогам, этот результат говорит о наличии настоятельной потребности в реформировании преподавания и изучения математики в США. Однако команда PISA занимается не только организацией тестов по математике, но и проводит опросы учащихся с целью сбора информации об их представлениях и убеждениях в отношении математики и своего мышления. Я получила предложение поработать со специалистами PISA, после того как некоторые члены этой команды прошли онлайн-курс, который я проводила прошлым летом. Одним из этих людей был Пабло Сойдо — учтивый испанец, который глубоко анализирует вопросы изучения математики и имеет богатый опыт работы с огромными объемами данных. Пабло — аналитик PISA. Проанализировав имеющиеся данные, мы с ним обнаружили нечто поразительное: именно учащиеся с мышлением роста добиваются самых высоких результатов в математике и опережают других более чем на год изучения математики (рис. 1.2).

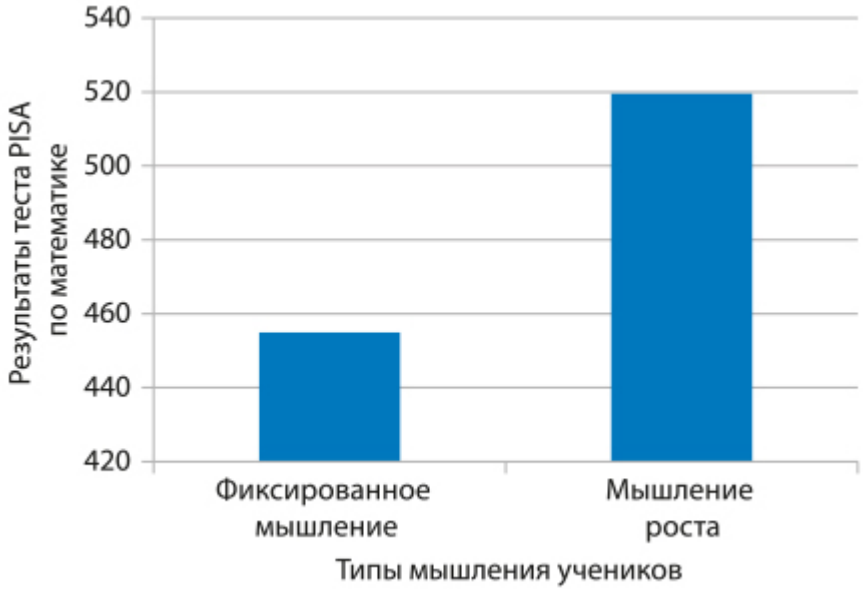


Рис. 1.2. Мышление и математика
Источник: PISA, 2012.

Фиксированное мышление (когда ученики считают, что они либо умные, либо нет), которое приводит к пагубным последствиям, свойственно ученикам всех уровней успеваемости. Но самый тяжелый вред оно наносит девочкам с высоким уровнем успеваемости (Dweck, 2006a). Как оказалось, губительна даже уверенность в собственных умственных способностях (одна из установок на данность). Ведь ученики с фиксированным мышлением менее склонны пробовать свои силы в более тяжелой работе или изучении более сложного предмета: они боятся, что совершат ошибку и их уже не будут считать умными. Ученики с мышлением роста берутся за трудную работу и воспринимают ошибки как вызов и стимул прилагать еще больше усилий. Высокая распространенность фиксированного мышления среди девочек — одна из причин того, что они не стремятся изучать технические дисциплины STEM[6]. Это не только ограничивает их жизненные шансы, но и обедняет дисциплины STEM, которые нуждаются в мышлении и видении девушек и женщин (Boaler, 2014a).

В США у многих людей сформировалось фиксированное мышление, в частности из-за того, как родители и учителя хвалят их. Когда ученики получают похвалу за какое-то качество (например, интеллект, если они хорошо справились с каким-то заданием), поначалу они чувствуют себя хорошо. Но когда они позже сталкиваются с неудачами (а они бывают у каждого), для

них это означает, что на самом деле они не так уж умны. В ходе одного из недавних исследований было обнаружено, что от того, как родители хвалят детей от момента рождения до трех лет, зависит их мышление через пять лет (Gunderson et al., 2013). Влияние похвалы, которую получают ученики, может быть настолько сильным, что это сразу сказывается на их поведении. В ходе одного из исследований Кэрол Дуэк 400 ученикам пятого класса предложили пройти небольшой легкий тест, с которым почти все справились хорошо. Затем половину детей похвалили за интеллект («Ты такой умный!»), а другую — за усилия при выполнении задания («Ты работал очень усердно!»). После этого детям предложили пройти еще один тест, дав им возможность выбрать между простым вариантом, с которым они могли легко справиться, и более сложным, в котором они могли сделать ошибку. 90% учеников, которых хвалили за усилия, выбрали более трудный тест. Большинство же тех, кого хвалили за интеллект, предпочли легкий вариант (Mueller & Dweck, 1998).

Похвала доставляет удовольствие. Но когда человека хвалят за его личные качества («Ты такой умный!), а не за то, что он сделал («Отличная работа!»), у него создается впечатление, что его способности неизменны. Сказать ученику, что он умный, — значит обречь его на проблемы в будущем. Когда в школе и в жизни ученики терпят неудачу в решении многих задач (что, повторю, вполне естественно), они оценивают себя, решая, умны они или нет. Вместо того чтобы хвалить учеников за умственные способности или другое личное качество, лучше сказать так: «Замечательно, что ты этому научился» или «Ты действительно хорошо все продумал».

В американской системе образования распространено представление, что способности некоторых учеников не позволят им изучать математику определенного уровня сложности. Не так давно я столкнулась с шокирующим фактом: несколько учителей математики в старших классах написали в школьный совет письмо, где утверждали, что некоторые ученики не способны сдать тест по алгебре второго уровня; в частности, что нуждаются в упрощении программы некоторые малообеспеченные ученики из числа нацменьшинств. Письмо было опубликовано в местных газетах, а законодательное собрание штата использовало его в качестве примера, подтверждающего необходимость создания чартерных школ[7] (Noguchi, 2012). Письмо вызвало всеобщий шок, но, к сожалению, мнение о том, что некоторые ученики не способны освоить высшую математику, свойственно многим. Такой ограниченный и расистский подход может принимать разные формы и порой применяется с искренней заботой об

учениках. Ведь многие считают, что дети готовы к изучению определенных математических тем только на определенной стадии своего развития. Но на самом деле готовность учеников зависит от накопленных ими практических знаний, а если они не готовы к изучению тех или иных тем, то могут подготовиться, получив необходимый опыт и поддержку и развив мышление роста. Не существует предопределенных темпов изучения математики, поэтому нельзя утверждать, что она недоступна тем, кто не достиг какого-то уровня возрастной или эмоциональной зрелости. Могут быть не готовы разве что те, кто пока не освоил необходимые базовые понятия. Остальное сформируется в процессе обучения.

Для многих из нас понимание важности математического мышления и формирование концепции и стратегий изменения мышления учеников подразумевает более тщательный подход к собственному обучению и отношениям с математикой. Многие учителя начальной школы, с которыми я работала (некоторые из них слушали мой онлайн-курс), рассказывали, что идеи о мозге, потенциале и мышлении роста, с которыми я их познакомила, полностью изменили их жизнь. Под влиянием этих идей у них сформировалось мышление роста в отношении математики, они начали заниматься ею с уверенностью и энтузиазмом и прививать такое отношение своим ученикам. Это особенно важно для учителей начальной школы, поскольку на определенном этапе многим из них говорили, что *они* не способны освоить математику или что эта дисциплина «не для них». Многие преподаватели математики сами боятся этой дисциплины. Результаты исследований, о которых я им рассказала, помогли им избавиться от страха и встать на другой путь. В ходе важного исследования Сайен Бейлок и ее коллеги пришли к выводу о наличии зависимости между уровнем негативных эмоций, которые учителя начальной школы испытывают по отношению к математике, и уровнем успеваемости девочек из их класса, но не мальчиков (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2009). Вероятно, это гендерное различие объясняется тем, что девочки отождествляют себя с учительницами, особенно в начальной школе. Они быстро подхватывают негативные сигналы в отношении математики, которые учителя зачастую подают из добрых побуждений, например: «Я знаю, что это очень трудно, но давай попробуем» или «Я никогда не любила математику». Кроме того, это исследование подчеркивает связь между сигналами, которые подают учителя, и успеваемостью их учеников.

Каков бы ни был уровень вашего мышления и знаний в этой области, я надеюсь, что представленные в этой книге данные и

идеи помогут вам и вашим ученикам воспринимать математику (на любом уровне) как предмет, доступный для понимания и приносящий истинное удовольствие. В главе 2, главе 3, главе 4, главе 5, главе 6, главе 7 и главе 8 приведено много стратегий формирования мышления роста на занятиях математикой в школе и дома, которые я собрала за долгие годы исследований и практической работы в школах. Они помогут вам дать ученикам такой опыт изучения математики, который позволит им развить сильное *математическое мышление*.

Глава 2. Сила ошибок и трудностей

Я начала проводить семинары о преподавании математики с ориентацией на мышление роста вместе со студентами магистратуры из Стэнфорда (Сарой Селлинг, Кэти Сан и Холли Поуп), после того как директора калифорнийских школ рассказали мне о том, что их учителя прочли книги Кэрол Дуэк и полностью поддерживают изложенные там идеи, но не знают, что все это значит для преподавания математики. Первый семинар состоялся в кампусе Стэнфордского университета, в светлом и просторном центре Ли Ка-Шинга. Одна из самых ярких фраз Кэрол Дуэк поразила учителей: «Каждый раз, когда ученик делает ошибку в математической задаче, у него появляется новый синапс». Все мысленно ахнули. Ведь речь шла о силе и ценности ошибок — хотя большинство учеников считают, что ошибки означают отсутствие у них математических способностей или, того хуже, отсутствие интеллекта. Многие учителя годами говорили ученикам, как полезны ошибки: они свидетельствуют о том, что мы учимся. Но новые данные о мозге и ошибках указывают на нечто гораздо более важное.

Психолог Джейсон Мозер со своей группой изучил нейронные процессы в мозге человека в момент совершения ошибки (Moser et al., 2011). Они обнаружили нечто удивительное. Мозг может отреагировать на ошибку двумя способами. Ответная реакция первого типа под названием «вызванный ошибкой негативный импульс» (error-related negativity, ERN) — повышенная электрическая активность при конфликте между правильным ответом и неверным. И такая активность возникает независимо от того, знает ли человек об ошибке. Ответная реакция второго типа под названием «вызванный ошибкой позитивный импульс» (positivity error, Pe) — сигнал, отражающий осознанное внимание к ошибкам. Такая реакция имеет место, когда человек знает, что совершил ошибку, и уделяет ей осознанное внимание.

Когда я сказала учителям, что ошибки активируют мозг и стимулируют его рост, они отреагировали так: «Конечно, только при условии, что ученики исправляют ошибку, а потом продолжают решать задачу». Но на самом деле это не так. Результаты исследований свидетельствуют о том, что мозг активизируется независимо от того, знаем ли мы об ошибке. Когда учителя спрашивают меня, как это возможно, я говорю, что пока лучшее объяснение таково: мозг активизируется и растет, когда мы делаем ошибки, ведь в это время он напряженно работает.

В ходе исследования Мозер с коллегами проанализировали мышление людей и сопоставили разные его типы с реакцией ERN и Pe при ошибочных ответах на поставленные вопросы. Ученые сделали два важных вывода. Во-первых, электрическая активность мозга учеников в случае реакций ERN и Pe была выше, когда они совершали ошибки, чем когда давали правильные ответы. Во-вторых, в случае ошибок активность мозга участников с мышлением роста оказалась выше активности мозга участников с фиксированным мышлением.

Очень важно то, что наш мозг реагирует на ошибки повышенной активностью. Подробнее об этом чуть позже.

Исследование также показало, что люди с мышлением роста лучше осведомлены об ошибках, чем люди с фиксированным мышлением, поэтому чаще исправляют свои промахи. Это согласуется с результатами других исследований (Mangels, Butterfield, Lamb, Good, & Dweck, 2006), продемонстрировавших, что у учеников с мышлением роста проявляются усиленная реакция мозга и внимание к ошибкам. Все ученики реагировали на ошибки возбуждением синапсов, но у людей с мышлением роста мозг чаще начинал активную работу, показывая осведомленность об ошибке.

Результаты неврологических исследований головного мозга и ошибок крайне важны для нас, учителей математики и родителей. Они свидетельствуют, что ошибки полезны. Когда мы их совершаем (даже если сами того не осознаем), наш мозг активизируется и растет; вдобавок мы учимся. Это важно, поскольку дети и взрослые во всем мире часто испытывают крайне негативные эмоции, когда ошибаются в решении математических задач: ведь они воспитывались в культуре достижений (см. Boaler, 2014b), где ошибки не ценят или того хуже — за них наказывают. Увы, многие задания для работы в классе составлены так, чтобы ученики смогли без проблем выполнить их правильно. Но на самом деле необходимо, чтобы ученики совершали ошибки. Чуть ниже представлены математические задачи, которые увлекают учеников и способствуют росту их мозга, и сигналы, которые должны подавать при этом учителя и родители.

В странах с самым высоким уровнем знаний по математике (например, в Китае) подход к ошибкам совсем иной. Недавно я наблюдала за уроком математики в Шанхае — китайском городе, где ученики демонстрируют самые высокие результаты в стране и в мире. Учитель давал ученикам серьезные концептуальные задачи, а затем устраивал опрос. Пока ученики с удовольствием рассказывали о проделанной работе, переводчик шепнул мне, что

учитель выбирает детей, которые сделали ошибки. Те с гордостью рассказывали об ошибках, поскольку учитель придает им большое значение. В главе 9 дано описание короткого и очень интересного эпизода одного из уроков в Китае.

Различные научные исследования не только демонстрируют ценность ошибок для каждого, но и показывают, что ученикам с мышлением роста свойственна более высокая активность мозга, связанная с обнаружением ошибок, чем ученикам с фиксированным мышлением. И именно поэтому мышление роста так полезно для изучения математики и других предметов.

Исследование Мозера, которое показало, что в случае ошибок у участников с мышлением роста активность мозга выше, чем у участников с фиксированным мышлением, позволяет сделать еще один важный вывод. Выходит, что наши представления о себе (в частности, вера в свои силы) меняют работу мозга. Если мы верим, что можем учиться и ошибки важны, наш мозг развивается активнее, когда мы их совершаем. Вот почему нужно верить в себя, особенно когда перед нами встают сложные задачи.

Ошибки в нашей жизни

Исследования успешных и неудачливых бизнесменов дали неожиданный результат: их характеризует количество не успехов, а ошибок. Да, более успешные люди совершают *больше* ошибок. Starbucks — одна из самых именитых компаний в мире, а ее основатель Говард Шульц — один из самых успешных предпринимателей современности. Когда он создал компанию, позже ставшую Starbucks, он использовал в качестве модели итальянские кафе. В США в то время было не так уж много кафе, а Шульц восхищался итальянскими заведениями. В первых кафе Шульца кофе подавали официанты в бабочках, в которых им было не по себе; пока клиенты пили кофе, в зале звучала оперная музыка. В США клиенты не очень хорошо восприняли этот антураж, и команда Шульца начала все с нуля и совершила еще много ошибок, прежде чем в итоге был создан бренд Starbucks.

Журналист New York Times Питер Симс написал много работ о роли ошибок в формировании творческого предпринимательского мышления (Sims, 2011). Он отмечает: «Несовершенство — часть любого творческого процесса и жизни, хотя почему-то мы живем в культуре, для которой характерен парализующий страх перед неудачей, мешающий действовать и усиливающий перфекционизм. Именно такой образ мыслей лишает веры в себя, если человек стремится стать более

изобретательным и предприимчивым».

Кроме того, Питер Симс перечисляет основные привычки успешных людей, утверждая, что все они делают следующее.

- Чувствуют себя комфортно, когда ошибаются.
- Пытаются реализовать на первый взгляд безумные идеи.
- Открыты разным типам опыта.
- Играют с идеями, не давая оценок.
- Готовы выступить против традиционных представлений.
- Не сдаются перед лицом трудностей.

В изучении математики эти привычки не менее важны, чем в жизни. Но, как это ни удивительно, они не применяются на уроках математики и во время выполнения домашних заданий по этому предмету. Необходимо, чтобы ученики чувствовали себя свободно, смело пробовали разные идеи и не боялись ошибок, придерживались открытого подхода к изучению математики и были готовы играть с задачами, пытаясь реализовать «на первый взгляд безумные идеи» (см. главу 5). Нужно, чтобы ученики выступили против традиционных представлений, отбросив идею о том, что одни люди могут заниматься математикой, а другие нет. Безусловно, необходимо, чтобы ученики не сдавались, когда задание по математике оказывается трудным и они не сразу находят решение.

Как изменить отношение к ошибкам?

Один из самых эффективных шагов, которые могут предпринять учителя и родители, — изменение обратной связи об ошибках и неправильных ответах в математике. Недавно я получила очень трогательное видео от учителя, который прошел мой онлайн-курс и начал учебный год с того, что рассказал на занятиях для отстающих учеников о важности и ценности ошибок. За год дети полностью изменились; они сделали выводы из прошлых неудач и снова приступили к изучению математики, но уже с положительным настроем. Этот учитель прислал видео, где ученики рассказывают о том, что сигнал о росте мозга под воздействием ошибок изменил для них все. По словам этих детей, раньше они считали себя неудачниками, и это мешало им добиваться успеха. В работе новый учитель использовал такие сигналы и методы преподавания, под влиянием которых они оставили в прошлом многолетний страх перед математикой и начали изучать этот предмет с новым рвением. Когда мы говорим ученикам, что ошибки полезны, они как будто освобождаются от

тяжкого груза.

В рамках своего онлайн-курса для учителей и родителей я поделилась со слушателями новой информацией об ошибках и поставила им интересную задачу: придумать игру, которая изменит отношение учеников к ошибкам в классе и дома. Одна учительница рассказала о своем методе: в самом начале урока она просит учеников смять лист бумаги и бросить его в сторону доски с тем чувством, которое они испытывают, когда делают ошибки в заданиях по математике. Ученики дают выход своим эмоциям (обычно разочарованию), швыряя смятые листы бумаги в доску. Затем учительница предлагает детям поднять листы, разровнять их и цветными маркерами разрисовать образовавшиеся на бумаге складки, которые олицетворяют рост их мозга. И затем хранить эти листы в своих папках весь учебный год как напоминание о важности ошибок.

Несколько лет назад я начала работать с Ким Холлиуэлл — великолепной учительницей, входящей в состав группы из объединенного школьного округа Виста, с которой я тесно сотрудничала на протяжении двух лет. В 2015 году я побывала в классе Ким и увидела, что все стены увешаны замечательными рисунками, на которых ученики изобразили свой мозг и написали позитивные высказывания о росте мозга и об ошибках. Ким рассказала мне, что попросила учеников выбрать любимые высказывания о росте мозга из всех, которые они вместе просмотрели, и написать их на изображениях своего мозга.

Еще одна стратегия, подчеркивающая важность ошибок, — предложить ученикам сдать свою работу в любом виде, даже тест (хотя чем реже мы проверяем уровень знаний учеников, тем лучше; подробнее см. главу 8). После этого учителя выделяют «любимые ошибки». Они должны объяснить ученикам, что ищут свои самые частые ошибки (серьезные, а не числовые погрешности). Затем дети могут рассказать об этих ошибках на уроке и начать в классе обсуждение: почему это ошибки и чем они обусловлены. В этот момент целесообразно подкрепить важные сигналы — в частности, сказать ученику, что ошибка принесла ему пользу, поскольку в этот момент он напряженно размышлял, что привело к активизации и росту его мозга. Кроме того, полезно рассказывать об ошибках и обсуждать их. Если один ученик делает ошибку, мы знаем, что другие тоже могут ее допустить; поэтому возможность проанализировать ошибку приносит пользу всем.

Если ставить ученикам оценки за выполнение заданий по математике (бесполезная практика, о которой мы поговорим позже), а также снижать баллы за ошибки, они получают крайне

негативный сигнал об ошибках и изучении математики. Чтобы развивать у учеников мышление роста и давать им позитивную обратную связь, учителя должны свести к минимуму тестирования и оценку уровня знаний учеников (см. главу 8). Если учителя продолжают проводить тесты и оценивать уровень знаний учеников, им следует ставить такие же (если не более высокие) оценки за ошибки. Это будет хороший сигнал о том, что ошибка — отличная возможность для обучения и роста мозга.

Очень важно подчеркивать ценность ошибок во время урока, в присутствии всех учеников. Но учителям необходимо также давать позитивную обратную связь об ошибках во время взаимодействия с учениками один на один. В первые годы учебы в школе моя дочь получила от учителей сигналы, которые нанесли ей огромный вред и из-за которых у нее в раннем возрасте сформировалось фиксированное мышление. В четыре-пять лет у нее были проблемы со слухом (о чем мы тогда не знали). Из-за этого учителя решили, что у нее ограниченные способности, и давали ей только легкие задания. Моя дочь полностью осознавала это; когда ей было всего четыре, она спрашивала меня, почему другим детям дают более сложные задачи. Мы знаем, что ученики тратят в школе много времени на то, чтобы понять, что о них думают учителя. Моя дочь смогла определить, что ее учителя не очень высокого мнения о ней, поэтому убедила себя в том, что она глупая. Сейчас ей двенадцать, она стала совсем другим человеком и полюбила математику, поскольку уже проучилась три года в замечательной школе, где сразу же определили, что у нее фиксированное мышление, и поняли, что это сдерживает ее развитие.

Когда моя дочь училась в четвертом классе и все еще страдала от фиксированного мышления, мы с ней побывали на уроке математики в третьем классе ее школы. Учительница записала на доске две числовые задачи; моя дочь одну решила правильно, а другую неправильно. Обнаружив ошибку, она отреагировала весьма болезненно, заявив, что у нее совсем плохо с математикой и она даже слабее третьеклассников. В этот момент нужно было сказать ей нечто очень откровенное и важное. Я заявила: «Знаешь, что сейчас произошло? Когда ты решила задачу неправильно, твой мозг вырос, а когда ты получила правильный ответ, в твоем мозге ничего не произошло». Именно так учителям стоит взаимодействовать со своими учениками, которые совершают ошибки. Дочь взглянула на меня широко распахнутыми глазами — и я поняла, что для нее это была очень важная мысль. Сейчас она переходит в шестой класс, и она стала совсем другой: позитивно воспринимает ошибки и положительно

относится к себе. Это стало возможно не потому, что ей давали больше заданий по математике или другой работы, а благодаря тому, что ее учили развивать мышление роста.

В 1930-е годы швейцарский психолог Жан Пиаже, один из крупнейших специалистов мира, отбросил идею о том, что суть обучения сводится к запоминанию. Он отмечал, что истинное обучение зависит от понимания того, как идеи согласуются друг с другом. Пиаже предположил, что у учеников есть ментальные модели, определяющие способ сведения идей воедино, а когда они приобретают для учеников определенный смысл, возникает то, что психолог назвал «равновесием» (см., например, Piaget, 1958, 1970). Сталкиваясь с новыми идеями, ученики пытаются привести их в соответствие с имеющимися ментальными моделями. Но если новые идеи не вписываются в существующие модели или эти модели необходимо изменить, ученики приходят в состояние, которое Пиаже обозначал термином «отсутствие равновесия». В таком состоянии человек знает, что новую информацию нельзя включить в его модели обучения; но ее нельзя и отбросить, поскольку она имеет смысл. И тогда человек пытается скорректировать свои модели. На первый взгляд может показаться, что отсутствие равновесия вызывает дискомфорт. Но, по мнению Пиаже, именно оно дарит истинную мудрость. Психолог представил обучение как процесс перехода от равновесия, в котором все связано воедино, к отсутствию оного, когда новая идея не согласуется с существующими моделями, а затем снова к состоянию равновесия. Пиаже утверждает, что этот процесс крайне важен в обучении (Haack, 2011).

В главе 4 рассматриваются практика в математике и типы практических заданий, одни из которых приносят пользу, а другие нет. И я подчеркиваю, что одна из проблем нынешнего математического образования состоит в том, что учеников знакомят с однообразными и простыми концепциями, не позволяющими им перейти к отсутствию равновесия. Мы знаем, что людям с высокой терпимостью к неопределенности легче переходить от отсутствия равновесия к равновесию — и поэтому мы должны чаще ставить учеников в условия неопределенности и риска. В следующих главах показано, как это можно сделать.

Исследования ошибок и отсутствия равновесия крайне важны для преподавания математики, причем не только для создания методов работы над ошибками, но и для выбора заданий. Если мы хотим, чтобы дети делали ошибки, нужно давать им сложные и интересные задачи, которые им трудно выполнить, но которые обеспечат отсутствие равновесия. Задания должны сопровождаться позитивной обратной связью — сигналами,

которые помогут ученикам чувствовать себя комфортно, когда они будут напряженно работать, делать ошибки и двигаться дальше. Это серьезные изменения для многих учителей, которые сейчас подбирают задания по математике так, чтобы ученики могли успешно справиться с ними, и задают вопросы, на которые дети обычно отвечают правильно. Получается, ученики не работают с полной отдачей и не получают достаточных возможностей для обучения и роста мозга.

На семинарах Кэрол Дуэк часто говорит родителям, чтобы те донесли до своих детей такую мысль: в правильном выполнении задания нет ничего хорошего, поскольку это свидетельствует об отсутствии обучения. И если дети приходят домой и говорят, что правильно ответили на все вопросы во время урока или теста, родителям стоит реагировать так: «Жаль: выходит, у тебя не было возможности чему-то научиться». Это весьма резкий отклик, но важный: нужно вытеснить идею, которую часто внушают в школе: «Надо делать все правильно, отсутствие ошибок — признак ума». Мы с Кэрол пытаемся изменить в*и*дение учителей, чтобы они придавали правильному выполнению заданий меньшее значение, и большее — важности ошибок.

Сэнди Гиллиам — замечательная учительница, за которой я наблюдала много лет. Ее ученики добиваются серьезных успехов и любят математику. Однажды я присутствовала на первом занятии, которое она проводила для учеников старших классов. Когда те работали над заданием, Сэнди заметила, что один ученик сделал ошибку и понял это. Она подошла к мальчику и попросила его показать свою ошибку на доске. Он неуверенно посмотрел на учительницу и сказал: «Но я же получил неправильный ответ». Сэнди ответила, что именно поэтому она хочет, чтобы ученик поделился своим результатом, и это очень полезно. Ведь такую же ошибку могут сделать и другие, поэтому стоит обсудить ее всем классом. Мальчик согласился и записал свой ход мыслей на доске. Со временем рассказы о своих ошибках стали для учеников обычной практикой. Я часто показываю видео с учениками Сэнди, которое помогает учителям и директорам школ понять, чего могут добиться дети при эффективном преподавании математики.

На одном из моих любимых видео показано, как ученики Сэнди пытаются вместе решить на доске сложную задачу. Ученики напряженно работают над решением и слушают друг друга, когда кто-то из них предлагает идею. Они часто ошибаются и выбирают неверный путь, но в итоге общими усилиями добиваются результата. Это яркий пример того, как ученики используют стандартные математические методы и практические

задания (в соответствии с рекомендациями CCSS[8]). Они объединяют свои идеи с известными им методами, чтобы решить нестандартную прикладную задачу из тех, с которыми им предстоит столкнуться в реальном мире. Опытные учителя, которые смотрят это видео, часто отмечают, что ученики чувствуют себя комфортно, предлагая различные идеи, и не боятся ошибиться. И вот почему дети способны эффективно выполнять задания, когда им не мешает страх перед ошибками: Сэнди научила их принимать ошибки и подчеркивает их важность в обучении.

Недавно я работала в Стэнфорде над одним исследованием вместе с Кэрол Дуэк, Грегом Уолтоном, Кариссой Ромеро и Дэйвом Паунеску. Именно они предложили множество приемов, которые улучшают мышление учеников и усиливают их чувство принадлежности к школе[9]. В ходе исследования мы провели сеанс воздействия на мышление учителей, объяснив им значение ошибок и ряд идей по поводу преподавания, о которых идет речь в данной главе. Мы быстро выяснили, что у учителей, которые были подвергнуты воздействию, гораздо более развито мышление роста и более положительное отношение к ошибкам в математике. Вдобавок они сообщили о том, что используют во время уроков разные идеи по поводу поощрения ошибок. Есть и другие важные изменения, которые учителя могут внести в свои уроки; они рассмотрены в следующих главах. Пока хочу отметить, что одно из самых важных изменений, которое могут без труда внедрить учителя или родители (и оно принесет ученикам огромную пользу), — корректировка обратной связи об ошибках. В следующей главе я расскажу, как важно изменить сам подход к математике. Необходимо показать ученикам, что истинная математика — не нечто неизменное и основанное на процедурах; это открытый и творческий предмет, суть которого сводится к установлению связей, обучению и развитию.

Глава 3. Творчество и красота в математике

Что же такое математика на самом деле? И почему многие ученики либо ненавидят, либо боятся ее — а то и всё вместе? Математика *отличается* от других предметов не тем, что в ней, как утверждают многие, могут быть только правильные или неправильные ответы, а тем, что методы ее преподавания отличаются от методов преподавания других предметов и у многих есть предубеждение к ней. Если вы спросите учеников, что они думают о своей задаче на уроках математики, большинство скажут: правильно отвечать на вопросы. Немногие считают, что на уроках математики они могут оценить ее красоту, задать глубокие вопросы, изучать богатый набор связей, которые описывает эта дисциплина, или даже научиться применять ее на практике. Как правило, ученики считают, что на уроках математики они должны только добиваться требуемого результата. Так, шестилетний сын одной из моих коллег (ее зовут Рейчел Ламберт) как-то, придя из школы, заявил, что не любит математику. Когда Рейчел спросила, в чем причина, он ответил: «На уроках мы только отвечаем на вопросы и мало учимся». Вот что чувствуют сами дети с раннего возраста.

Эта проблема во многом обусловлена сформировавшейся в США системой тестирования, которая особенно распространена в математике. Когда в первый же день учебного года ученики шестого класса средней школы местного округа пришли домой и заявили, что у них был тест, речь шла только об одном предмете: математике. Большинство учеников и родителей принимают это. Одна девочка сказала мне так: «Ну, учительница просто выясняла, что мы знаем». Но почему такое происходит только в математике? Почему учителя не считают нужным в первый же школьный день определять уровень знаний учеников по другим предметам? И почему некоторые педагоги не осознают, что постоянное тестирование учеников не только позволяет проверять уровень знаний (что само по себе сопряжено со множеством проблем), но и заставляет учеников думать, будто именно в этом и состоит суть математики: поиске коротких ответов на узкие вопросы в условиях стресса? Неудивительно, что многие ученики решают, будто математика «не для них».

Есть и другие признаки того, что математика отличается от всех прочих дисциплин. Когда мы спрашиваем учеников, что такое математика, они обычно дают описание, которое

отличается от описания специалистов. Как правило, ученики говорят, что суть предмета сводится к вычислениям, процедурам или правилам. А вот когда мы спрашиваем математиков, в чем суть их предмета, они говорят, что это изучение закономерностей, эстетичная, творческая и красивая дисциплина (Devlin, 1997). Откуда такая разница? Когда мы спрашиваем людей, изучающих английскую литературу, что представляет собой эта дисциплина, они дают почти то же описание, что и преподаватели.

Мариам Мирзахани — математик из Стэнфордского университета, получившая недавно Филдсовскую премию, высшую награду в области математики. Эта удивительная женщина изучает гиперболические пространства и не так давно разработала теорию, получившую статус теории десятилетия. В статьях о работе Мариам всегда приводятся фотографии, где она делает наброски идей на большом листе бумаги на кухонном столе: ведь почти вся работа Мариам носит визуальный характер. Не так давно я была председателем комиссии по защите докторской диссертации одной из студенток Мариам. Это финальный экзамен для докторантов: они защищают работы, над которыми трудились несколько лет, перед профессорами, входящими в состав специальной комиссии. Мне было интересно, как пройдет защита диссертации, на которой мне предстояло выполнять функции председателя комиссии. Мероприятие проходило в небольшой аудитории, окна которой выходили на бульвар Палм-драйв, ведущий к университету. Там собрались математики, студенты и профессора, которые пришли понаблюдать за защитой диссертации или дать ей оценку. Студенткой Мариам была молодая женщина по имени Женя Сепир. В тот день она ходила по аудитории, увешанной ее рисунками, иллюстрировавшими предположения о взаимосвязях между прямыми и кривыми, и рассказывала о них. Она описывала область, в которой важную роль играют визуальное отображение, творческий подход и связи и которой свойственна неопределенность (рис. 3.1).

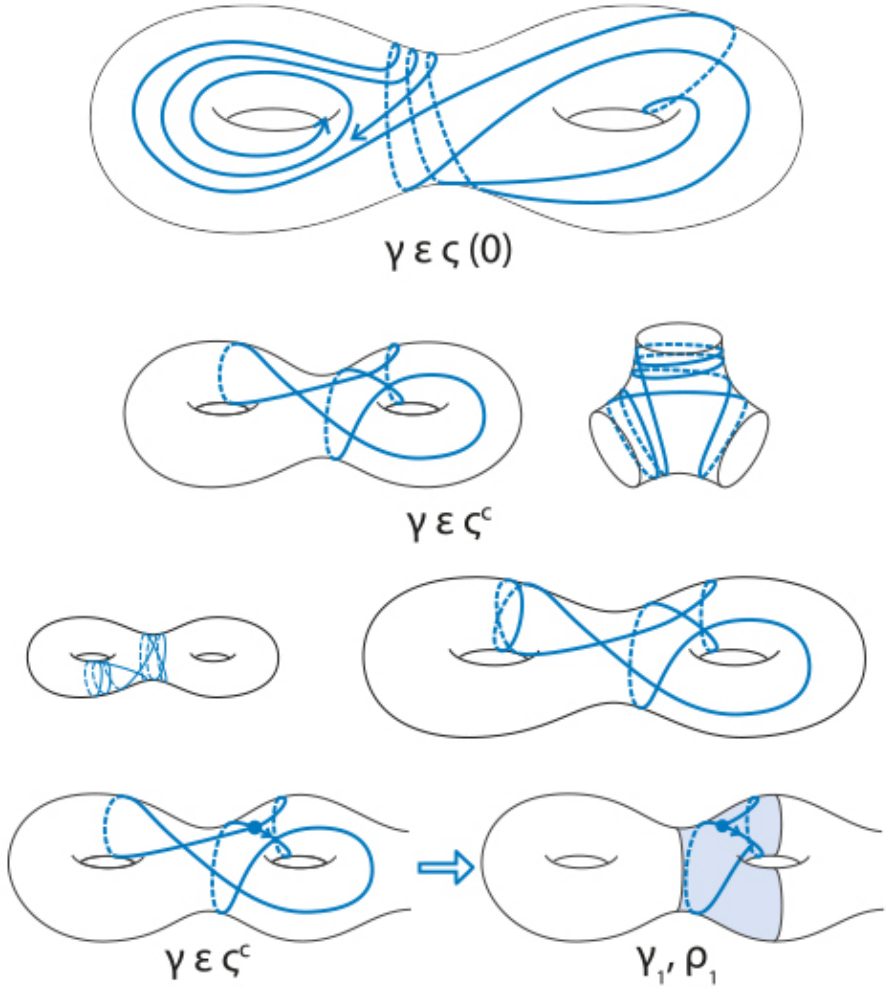


Рис. 3.1. Некоторые идеи из докторской диссертации Жени Сепир по математике

Публикуется с разрешения Жени Сепир.

Во время защиты диссертации профессора три или четыре раза задавали вопросы, на которые уверенная в себе молодая женщина отвечала: «Я не знаю». Часто профессор прибавлял, что он тоже не знает. Было необычно слышать «не знаю» на защите докторской диссертации. Некоторые профессора отнеслись бы к этому с неодобрением. Но истинная математика — дисциплина, которой свойственна неопределенность. Ее суть сводится к исследованиям, гипотезам и интерпретациям, а не однозначным ответам. Присутствовавшие на защите профессора сочли вполне обоснованным то, что Женя не знала ответов на некоторые вопросы, поскольку ее работа вступала в область неизведанного. Женя Сепир блестяще защитила диссертацию.

Все это не значит, что математика не дает ответов на вопросы. Многие математические факты известны, и ученикам важно изучить их. Однако по каким-то причинам школьная математика оказалась настолько далека от математики истинной, что если бы в тот день я привела школьников на защиту диссертации, то они не поняли бы, о чем речь. Именно большой разрыв между истинной математикой и школьным предметом стал основой проблем с этой дисциплиной в сфере образования. Я глубоко убеждена, что если бы во время школьных уроков математики учителя раскрывали истинную суть этого предмета, то не было бы ни всеобщей неприязни к нему, ни низкой успеваемости.

Математика — культурный феномен. Это совокупность идей, связей и соотношений, позволяющая человеку осмыслить мир. По сути, это наука о закономерностях. Если взглянуть на мир сквозь призму математики, можно найти закономерности повсюду. И их понимание, полученное в рамках изучения математики, обеспечивает создание новых, эффективных знаний. Выдающийся математик Кит Девлин посвятил книгу этой теме. В своей работе «Математика: наука о закономерностях» он пишет следующее.

> Поскольку математика — наука об абстрактных закономерностях, практически не существует аспектов нашей жизни, на которые она не влияет. Ведь абстрактные закономерности определяют суть мышления, коммуникации, вычислений, общества и самой жизни (Devlin, 1997).

Знание математических закономерностей помогает людям покорять океаны, прокладывать маршруты космических полетов, разрабатывать технологии для мобильных телефонов и социальных сетей, а также создавать новые научные и медицинские знания. Однако многие ученики считают, что математика — мертвая наука, не имеющая отношения к их будущему.

Чтобы понять суть математики, следует рассмотреть ее закономерности в реальном мире. Закономерности в океане и дикой природе, архитектуре и осадках, поведении животных и социальных сетях вызывают у математиков восхищение. Последовательность Фибоначчи, пожалуй, самая известная из них. Фибоначчи — итальянский математик, опубликовавший в 1202 году в Италии работу о закономерности, названной в его честь. Сейчас известно, что она появилась несколькими столетиями ранее, еще в 200 году до н. э., в Индии. Вот как выглядит последовательность Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55…

Первые два числа — 1 и 1, а каждое следующее представляет собой сумму двух предыдущих.

Попробуйте приглядеться к снежинкам. Каждая из них уникальна, но их объединяет одна закономерность. Все снежинки имеют шестиугольную структуру, поэтому у них всегда шесть концов (рис. 3.2 и 3.3).

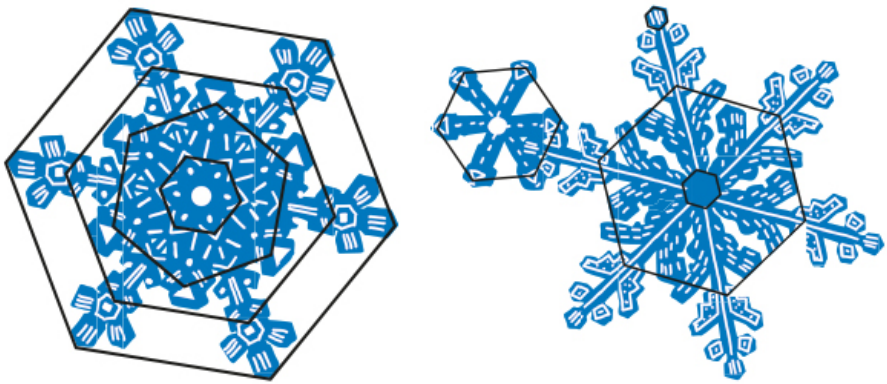


Рис. 3.2. Математика в снежинках

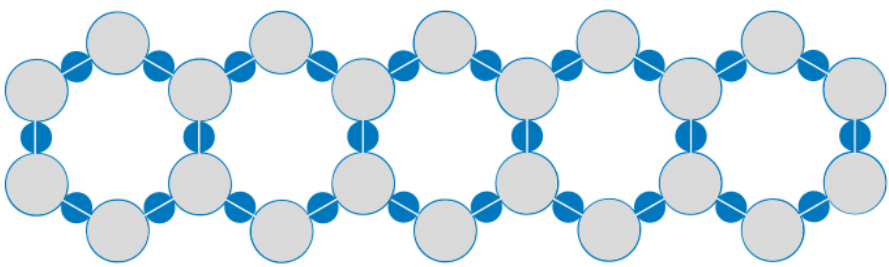


Рис. 3.3. Молекулы воды

Во время онлайн-курса для учеников, изучающих математику, в котором поучаствовало более 100 тысяч слушателей, я показала, как математику используют животные. Аудитория заинтересовалась этим. Например, дельфины находят друг друга в воде с помощью звуков (рис. 3.4).

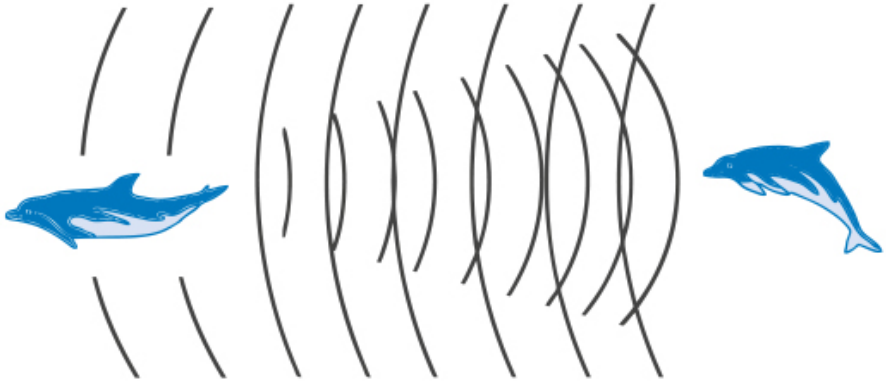


Рис. 3.4. Общение между дельфинами

Дельфин издает характерные щелкающие звуки, которые отражаются от различных объектов и возвращаются к нему. Затем по времени прохождения и характеристикам звукового сигнала животное определяет, где находятся его друзья. Он интуитивно вычисляет скорость, то есть находит ответ на тот самый вопрос о скорости, который задают ученикам на уроках алгебры (во многих случаях он никак не связан с реальной жизнью). Во время онлайн-курса я в шутку сказала слушателям, что, если бы дельфины могли разговаривать на человеческом языке, они стали бы учителями алгебры!

Во время исследований для онлайн-курса моя студентка Микаэла обнаружила, что пауки — настоящие эксперты по спиралям. Когда паук создает паутину, он сначала плетет фигуру в форме звезды между двумя прочными вертикальными опорами, например ветвями дерева. Затем паук закручивает спираль. Ему нужно построить ее как можно быстрее, чтобы закрепить звезду, поэтому он выбирает логарифмическую спираль. В ней расстояние между следующими друг за другом витками вокруг центра увеличивается в одинаковое количество раз (рис. 3.5).

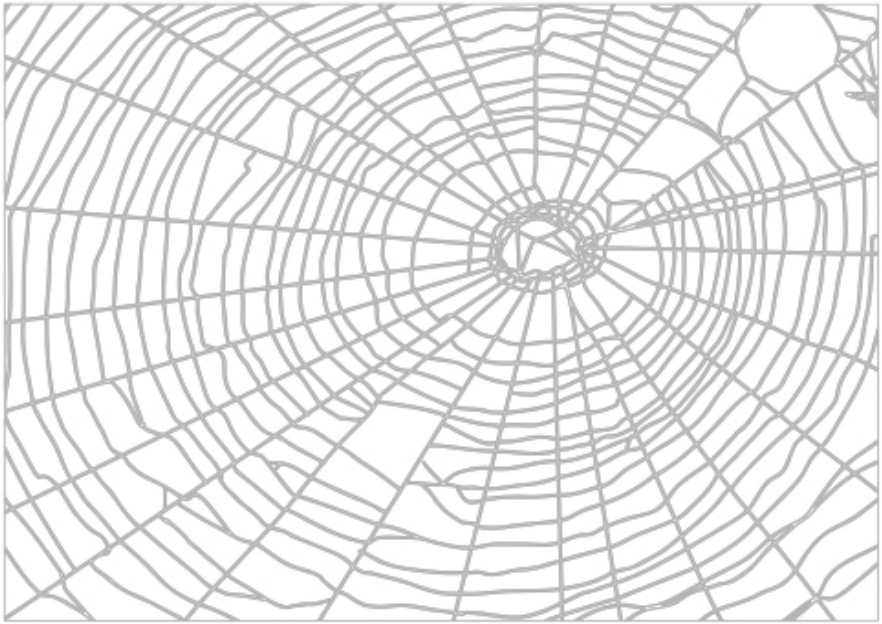


Рис. 3.5. Паутина

Получается, чем больше спираль, тем быстрее она расширяется. Но при этом в паутине образуются большие промежутки, поэтому паук начинает строить еще одну, более плотную спираль, одновременно отцепляя первую. Новая спираль — *арифметическая*, в ней расстояние между витками постоянно. Плетение второй спирали занимает гораздо больше времени, поскольку приходится делать больше кругов вокруг центра звезды. Но это помогает пауку поймать больше насекомых, поскольку в сети не остается крупных промежутков. Такую поразительную инженерную конструкцию можно было бы построить с помощью вычислений, но паук интуитивно использует математику при разработке и применении своего алгоритма. Другие примеры использования математики животными можно найти в работах Кита Девлина (Devlin, 2006).

Когда я демонстрировала все эти идеи слушателям своего онлайн-курса, некоторые из них не соглашались со мной, заявляя, что математика в природе и мире животных — это не математика. Эти люди признавали только область чисел и вычислений. Я хотела подтолкнуть слушателей к более широкому восприятию предмета. И достигла своей цели. К концу курса среди слушателей был проведен опрос, в ходе которого 70% респондентов сказали, что изменили свои представления о том, что такое математика. При этом 75% слушателей убедили себя, что они могут добиться успеха в математике.

Математика есть повсюду в природе и искусстве, и все же большинство школьников даже не слышали о золотом сечении и не воспринимают математику как науку о закономерностях. Если мы не откроем ученикам эту дисциплину во всем ее многообразии, то лишим их возможности ощутить волшебство математики.

Не я одна считаю, что школьная математика не имеет ничего общего с математикой истинной. В 1999 году Рубен Херш написал замечательную книгу под названием «Что же такое математика?» (Hersh, 1999). Он утверждает, что математику представляют на уроках в искаженном виде. Большинство учеников воспринимают ее как совокупность ответов на вопросы, которых никто не ставит. Но Херш отмечает следующее.

> Речь о вопросах, которые стимулируют развитие математики. Решение задач и постановка новых — основа этой науки. Если математику представить в отрыве от жизни, она действительно покажется мертвой.

Научные исследования (Silver, 1994) показали: когда ученикам дают возможность сформулировать математическую задачу, проанализировать ситуацию и придумать вопрос к ней (в этом и состоит суть истинной математики), это повышает их вовлеченность и успеваемость. Но это редкость. Помните, в известном фильме 2001 года «Игры разума» Джон Нэш (которого играет Рассел Кроу) изо всех сил пытается найти интересный вопрос? Это и есть крайне важный первый этап математической работы. На школьных уроках математики у учеников нет возможности выполнить это важное действие; они тратят время на вопросы, которые кажутся им не имеющими отношения к жизни и которых они не ставили.

В своей книге «При чем тут математика?» я описываю подход к организации урока математики, основанный на постановке вопросов (Boaler, 2015a). Преподаватель Ник Фиори создавал для учеников математические ситуации с участием таких предметов, как сосновые шишки, игральные карты, цветные бусины, кости, различные детали, и предлагал сформулировать свои вопросы. Поначалу ученикам было трудно выполнять это задание, но постепенно они заинтересовались и научились использовать свои идеи, проводить математические изыскания и осваивать новые методы.

Много лет школьная дисциплина теряла связь с наукой, которую используют ученые, и с математической жизнью. Ученики тратили тысячи часов на изучение процедур и правил, которые им никогда не пригодятся. Конрад Вольфрам — директор

Wolfram-Alpha, одной из важнейших математических компаний во всем мире — резко критикует традиционный подход к преподаванию математики и категорически заявляет, что суть ее не сводится к вычислениям. В своем выступлении на конференции TED[10], которое посмотрели более миллиона людей, Вольфрам предложил, чтобы занятия математикой состояли из четырех этапов.

1. Постановка вопроса.
2. Переход от реального мира к математической модели.
3. Выполнение вычислений.
4. Возврат от модели к реальному миру, чтобы определить, получен ли ответ на исходный вопрос.

Первый этап подразумевает постановку продуманного вопроса по поводу определенных данных или ситуации. Это первое математическое действие, которое необходимо выполнить на рабочем месте. В США самая востребованная профессия — аналитик, или специалист по обработке больших данных, имеющихся в распоряжении каждой компании, и постановке важных вопросов по поводу этих данных. Второй этап, о котором говорит Вольфрам, — создание модели, позволяющей найти ответ на поставленный вопрос; третий — вычисления, а четвертый — возврат от модели к реальному миру, чтобы определить, точен ли ответ. Вольфрам отмечает, что 80% времени на уроках математики в школе тратится на третий этап (вычисления вручную). При этом способность работников делать вычисления не нужна работодателям: это могут делать калькуляторы или компьютеры. Вольфрам предлагает, чтобы вместо третьего этапа школьники уделяли больше времени этапам 1, 2 и 4.

Вольфрам утверждает, что в наше время работодателям необходимы люди, которые умеют задавать верные вопросы, разрабатывать модели, анализировать результаты и интерпретировать ответы, а не быстро выполнять вычисления, как раньше.

В список Fortune 500 входят 500 крупнейших компаний США. Когда в 1970 году руководителей этих компаний спросили, какие качества новых сотрудников представляют для них самую большую ценность, ответы выглядели так (табл. 3.1).

Таблица 3.1. Самые ценные качества сотрудников компаний из списка Fortune 500, по состоянию на 1970 год

1	Навыки письма
2	Навыки вычислений
3	Навыки чтения
4	Навыки устной коммуникации
5	Умение слушать
6	Повышение квалификации и карьерный рост
7	Творческое мышление
8	Лидерские качества
9	Постановка целей / мотивация
10	Умение работать в команде
11	Организационная эффективность
12	Навыки решения проблем
13	Навыки межличностного общения

Навыки вычислений занимали второе место в списке. В 1999 году список выглядел так, как показано в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Самые ценные качества сотрудников компаний из списка Fortune 500, по состоянию на 1999 год

1	Умение работать в команде
2	Навыки решения проблем
3	Навыки межличностного общения
4	Навыки устной коммуникации
5	Умение слушать
6	Повышение квалификации и карьерный рост
7	Творческое мышление
8	Лидерские качества
9	Постановка целей / мотивация
10	Навыки письма
11	Организационная эффективность
12	Навыки вычислений
13	Навыки чтения

Навыки вычислений опустились на предпоследнее место в списке, а первые места заняли умение работать в команде и навыки решения задач.

Часто родители не видят нужды в строгости, которая составляет суть математики. Многие спрашивали меня: зачем ребенку объяснять свою работу, если он может получить верное решение? Мой ответ неизменен: объяснение называется в математике рассуждением, а рассуждение — обязательное условие математической строгости. Специалисты по

естественным наукам доказывают или опровергают теории путем поиска реальных ситуаций, в которых эти теории работают или не работают. Математики доказывают теории в рамках обоснования. Им необходимо привести аргументы, которые убедят других, тщательно выстраивая цепочку рассуждений от одной идеи к другой с помощью логических связей. Математика — сугубо социальная наука, поскольку доказательство возникает только тогда, когда математики могут убедить коллег в наличии логических связей.

Многие работы по математике — плод совместного труда. Леоне Бертон изучала работу математиков и пришла к выводу, что более половины их публикаций подготовлены в соавторстве (Burton, 1999). Но на многих уроках математики ученики в полной тишине заполняют листы с заданиями. В то время как очень важно обсуждать задачи в группах или всем классом. Это самый эффективный инструмент осмысления материала (ученики редко усваивают идеи, не обсудив их); оно делает предмет интереснее и вовлекает детей в процесс обучения. Кроме того, во время обсуждения школьники учатся рассуждать логически и критиковать мнения друг друга, а оба этих качества очень востребованы в современных компаниях. В мире высоких технологий почти все новые профессии подразумевают работу с большими объемами данных, постановку вопросов и поиск способов достижения целей на основе логических рассуждений. Конрад Вольфрам сказал мне, что любой, кто не способен делать математические умозаключения, не сможет эффективно выполнять свои обязанности на рабочем месте. Когда сотрудники рассуждают и обсуждают математические способы решения проблем, их коллеги могут сформулировать новые идеи на основе этих способов, а также определить, нет ли здесь ошибки. Командная работа, которую так высоко ценят работодатели, основана на математическом рассуждении. Люди, которые просто выдают результаты вычислений, не приносят пользы; они должны уметь обосновывать полученные результаты.

Кроме того, необходимо, чтобы ученики рассуждали на уроках математики, поскольку сам акт осмысления задачи и анализа рассуждений другого человека вызывает *интерес*. Ученики и взрослые гораздо активнее участвуют в работе, когда им дают открытые задачи и разрешают предлагать свои методы и пути решения, чем в работе над задачами, требующими вычислений и ответа. В главе 5 представлено много содержательных математических задач, требующих логических рассуждений, а также показаны некоторые способы их составления.

В сфере обучения математике часто возникает и другая проблема: люди убеждены в том, что эта дисциплина сводится к вычислениям, а лучшие математические умы — люди, которые умеют быстро вычислять. Более того, некоторые считают, что *успешно* заниматься математикой может только тот, кто умеет *быстро* думать. Но многие математики, которых можно считать весьма одаренными людьми, выполняют вычисления *медленно*, потому что их рассуждения очень тщательны и глубоки.

Лоран Шварц получил Филдсовскую премию и был одним из величайших математиков своего времени. Однако в школе он решал математические задачи медленнее всех одноклассников. В автобиографии «Математик, преодолевающий трудности своего столетия», опубликованной в 2001 году, Шварц вспоминает свои школьные годы и говорит, что он чувствовал себя глупым, поскольку в его школе ценилась способность быстро думать, а он размышлял медленно и глубоко.

> Я никогда не был уверен в своих способностях и считал, что я не наделен интеллектом. Я всегда думал и до сих пор думаю медленно. Мне нужно время, чтобы уловить смысл происходящего, поскольку мне необходимо понять все до конца. К концу одиннадцатого класса я в глубине души считал себя тупым. Это долго меня беспокоило.
>
> Я до сих пор думаю медленно… В конце одиннадцатого класса я проанализировал ситуацию и пришел к выводу, что скорость мышления не имеет прямого отношения к интеллекту. Гораздо важнее глубоко понимать суть вещей и их взаимосвязи. Вот в чем заключается интеллект. Скорость размышлений не важна (Schwartz, 2001).

Шварц, как и многие другие математики, пишет об искажении дисциплины на уроках, а также о том, что суть математики в действительности сводится к определению связей и глубоким размышлениям. Многие школьники думают точно так же медленно и глубоко, но не верят в себя. Сама необходимость быстрых вычислений отталкивает многих детей, особенно девочек (подробнее см. главу 4 и главу 7), но по-прежнему в ходу тесты, флеш-карточки и математические приложения с ограничением времени на выполнение заданий. Национальные лидеры, например экс-президент Национального совета преподавателей математики (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) Кэти Сили, стараются опровергнуть это мнение, предлагая новый способ эффективного изучения предмета (см. Seeley, 2009, 2014),

чтобы люди, которым свойственно медленное и глубокое мышление (Boaler, 2002b), прекратили думать, будто они не созданы для математики. В следующей главе показан подход, при котором ценится глубина, а не скорость мышления, который помогает развить связи в головном мозге и пробуждает интерес у гораздо большего количества учеников.

Резюме

В начале этой главы шла речь о том, что математика отличается от других дисциплин. Но это связано не с ее природой, как считают многие, а с серьезными и распространенными заблуждениями по поводу этой дисциплины: будто она основана на правилах и процедурах; будто успешно заниматься ею может только тот, кто умеет быстро думать; будто главное в математике — определенность и правильные и неправильные ответы, и суть ее сводится к числам. Такие ошибочные представления — одна из причин того, что до сих пор в преподавании математики используются традиционные, неправильные и неэффективные методы. Многие родители ненавидели этот предмет в школе, но все равно выступают в поддержку традиционного подхода, полагая, что так и должно быть, что отталкивающие методы преподавания, которые они познали на своем опыте, обусловлены природой самой математики. Многим учителям начальной школы также пришлось пережить в свое время ужасные испытания при изучении математики; им трудно преподавать ее, поскольку и для них она выглядит как формальный набор процедур. Когда я показываю таким учителям, что математика — нечто иное и не нужно подвергать своих учеников тем же тяготам, через которые прошли они сами, у них возникает подлинное чувство освобождения и даже эйфории, как показано в главе 5. Если мы проанализируем, сколько заблуждений встречается на уроках математики, нам будет легче понять масштаб проблем в ее преподавании по всему миру, а также (что еще важнее) сделать вывод о том, что неудач в математике и тревог в связи с этим предметом вполне можно избежать.

Взглянув на математику, которая присутствует в окружающем мире и которую используют специалисты, мы увидим, что это творческая, наглядная, связная, живая дисциплина. Но многие ученики воспринимают ее как набор бесполезных методов и процедур, которые нужно зачем-то запоминать; как сотни ответов на вопросы, которых они никогда не задавали. Когда людей

спрашивают о применении математики в реальном мире, они, как правило, думают о числах и вычислениях (как рассчитать ипотечный кредит или цену продажи). Но математическое мышление не сводится только к этому. Мы применяем математику, когда рассуждаем, как провести время, сколько событий и заданий можно запланировать на день, какая площадь нужна для установки оборудования или разворота автомобиля, сколько событий может произойти. Математика помогает понять, как распространяются твиты и сколько людей могут их получить. Мир с уважением относится к людям, которые быстро выполняют вычисления, но некоторые люди при этом не способны достичь важных целей с их помощью, зато другие, хотя и размышляют очень медленно и совершают много ошибок, могут сотворить с помощью математики нечто удивительное. В современном мире вычисления полностью автоматизированы, привычны и ни у кого не вызывают удивления. Сильные мыслители теперь — люди, которые устанавливают связи, рассуждают логически и творчески используют пространство, данные и числа.

Нельзя винить учителей в том, что во многих школах преподается ограниченная и выхолощенная версия математики. Учителям обычно дают длинные списки тем, которые они должны объяснить, вместе с сотнями описаний. Но на глубокое изучение конкретных идей времени не предусмотрено. Когда учителям дают списки тем для преподавания, они видят предмет, разделенный на составляющие — как разобранный на части велосипед, превратившийся в груду деталей, которые ученикам предстоит чистить и полировать весь год. В списки тем не включены связи; дисциплина в них представлена так, будто связей вообще не существует. Я не хочу, чтобы ученики целый день полировали отдельные детали велосипеда! Я хочу, чтобы они свободно ездили на велосипедах, получая удовольствие от математики, испытывая радость от установления связей и впадая в эйфорию от истинного математического мышления. Когда мы раскроем суть математики и будем преподавать ту широкую, наглядную, творческую математику, о которой идет речь в этой книге, она станет предметом, который может чему-то научить. Ученикам трудно развить мышление роста, если они должны только давать правильные ответы на четкие вопросы. Такие вопросы сами по себе способствуют формированию фиксированного мышления. Когда мы преподаем математику (истинную науку о глубинных связях), это расширяет возможности для формирования мышления роста и обучения, а в классах появляется много счастливых, воодушевленных и увлеченных учеников. В следующих пяти главах представлено

много идей, как добиться этого, а также приведены результаты исследований, подтверждающие эти идеи.

Глава 4. Формирование математического мышления: гибкий подход к работе с числами

Малыши любят математику. Дайте детям набор кубиков — и они будут ставить эти детальки друг на друга и располагать в определенном порядке, с интересом наблюдая, как грани выстраиваются в одну линию. Дети смотрят на небо и восхищаются тем, как птицы летят клином. Посчитайте какие-нибудь предметы с маленьким ребенком, затем переставьте их и снова сосчитайте — ребенок придет в восторг от того, что количество предметов не изменилось. Предложите ребенку расставить цветные кубики по какой-нибудь схеме — и он с удовольствием будет создавать повторяющиеся рисунки (самое математическое из всех действий). Кит Девлин написал ряд книг, в которых убедительно доказывается, что математика у нас в крови и всем нам свойственно математическое мышление (см., например, Devlin, 2006). Мы хотим видеть закономерности мира и понимать ритмы Вселенной. Но радость и восторг детей перед математикой быстро уступает место страху и неприязни, как только они начинают изучать ее в школе и их знакомят с набором формальных методов, которые они должны просто принять и запомнить.

В Финляндии, стране с самыми высокими результатами тестов PISA, дети изучают формальные математические методы только после семи лет. В США, Великобритании и некоторых других странах эти методы начинают изучать гораздо раньше. К семи годам дети здесь уже знакомы с алгоритмами сложения, вычитания, умножения и деления чисел, и их заставляют учить таблицу умножения. Младшеклассники приходят в замешательство: все это не имеет для них смысла. Любознательность, которая была свойственна им ранее, угасает и уступает место твердой убежденности в том, что суть математики сводится к инструкциям и правилам.

Главное, что мы можем дать своим ученикам, — стимулировать их к тому, чтобы они играли с числами и фигурами, размышляя, какие закономерности и идеи можно в них выявить. В предыдущей книге (Boaler, 2015a) я рассказала историю Сары Флэннери, которая получила звание «Молодой ученый года» за разработку нового математического алгоритма. В своей автобиографии Сара рассказывает о том, как развивала

математическое мышление, начав с решения головоломок в доме своего отца, а также о том, что эти головоломки дали ей больше, чем школьный курс математики (Flannery, 2002). Успешные математики придерживаются подхода к этой науке и к пониманию ее концепций, который отличает их от менее успешных пользователей. Они стремятся понять ее и размышлять о ней, уверены в том, что они могут понять ее смысл. Успешные пользователи математики ищут закономерности и соотношения, анализируют связи. Они опираются на *математическое мышление*, понимая, что это наука о развитии, стремятся изучать и анализировать новые концепции. Нам необходимо прививать такое мышление ученикам с самого начала их взаимодействия с математикой.

Результаты исследований подтвердили важность мышления роста — убежденности в том, что ваш интеллект развивается и чем больше вы учитесь, тем умнее становитесь. Но чтобы исключить неудачи с математикой, необходимо, чтобы у учеников были установки на рост в отношении себя в сочетании с установками на рост в отношении математики и их роли в связи с этим. Детям необходимо воспринимать математику как концептуальную, развивающую дисциплину, которую необходимо осмыслить. Когда ученики воспринимают математику как последовательность коротких вопросов и фиксированного набора методов, они не могут понять, в чем ее смысл для их личностного роста и обучения. Когда ученики воспринимают математику как мир неизведанного, по которому они могут свободно путешествовать, задавая вопросы и анализируя взаимосвязи, они понимают, что их задача — размышлять, осмысливать происходящее и развиваться. И это значит, что у них есть математическое мышление.

Себастьян Трун, генеральный директор образовательной компании Udacity и исследователь из Стэнфордского университета, обладает математическим мышлением. Я начала работать с ним два года назад. Сначала я знала его как преподавателя информатики и человека, который изобрел беспилотный автомобиль, организовал первый курс MOOC и возглавлял группы по разработке Google Glass и Google Maps. Позже Себастьян перешел от ведения очень успешного онлайн-курса, который прошли 160 тысяч человек, к созданию компании дистанционного обучения Udacity. Мое сотрудничество с ним началось тогда, когда он попросил у меня совета по поводу курсов Udacity. Себастьян — пользователь математики высокого уровня, его многочисленные достижения известны во всем мире. Он написал ряд книг по математике, которые настолько сложны,

что от них, как говорит он сам, «из головы может пойти дым». Но мало кто в курсе, что он много размышляет о подходах к пониманию и изучению математики. Когда я беседовала с Себастьяном о моем онлайн-курсе («Как изучать математику») для учителей и родителей, он рассказал, какую роль играет интуиция в освоении математики, решении проблем и осмыслении различных ситуаций. Он поведал, как в процессе создания роботов для Смитсоновского института возникла проблема. Дети и другие посетители института создавали фоновый шум, который дезориентировал роботов. Членам его команды пришлось разработать новые математические способы решения этой проблемы. В итоге Себастьян решил проблему интуитивно. Он рассказал, как сначала было найдено математическое решение, которое имело для него смысл на интуитивном уровне, после чего оно было доказано с помощью математических методов. Себастьян настаивает, что в математике нельзя двигаться дальше, если что-то не имеет смысла на интуитивном уровне. В рамках моего онлайн-курса он советует не работать с формулами или методами, которых дети не понимают, и «просто остановиться», если эти методы не имеют для них смысла.

Как же развивать у учеников математическое мышление, чтобы они были готовы изучать предмет на основе осмысления и интуиции? До начала учебы в школе это простая задача. Достаточно предлагать детям играть с головоломками, фигурами и числами, анализируя взаимосвязи между ними. Но в начальной школе действует система, в которой дети с раннего возраста обязаны изучать много математических методов: правила сложения, вычитания, деления и умножения. Именно тогда ученики отклоняются от математического мышления и у них формируется фиксированное, процедурное мышление. И крайне важно, чтобы учителя и родители представили детям математику как гибкую концептуальную дисциплину, суть которой сводится к размышлениям и осмыслению. Начало работы с числами — лучший пример двух типов мышления, которое мы можем сформировать у своих учеников: один тип отрицательный и приводит к неудаче, а другой положительный и ведет к успеху.

Чувство числа

Эдди Грей и Дэвид Толл — британские исследователи, работавшие с учениками в возрасте от семи до тринадцати лет, которых учителя отнесли к числу слабых, середнячков и сильных

(Gray & Tall, 1994). Всем им дали задачи с числами, например на сложение или вычитание. Исследователи обнаружили важное различие между слабыми и сильными учениками. Сильные решали задачи с помощью так называемого чувства числа — их работа носила гибкий и концептуальный характер. Слабые не использовали его и старались вспомнить и применить стандартный метод, даже если это трудно. Например, когда ученикам давали такие задачи, как 21 — 6, сильные ученики упрощали задание, сведя его к вычислению 20 — 5, а слабые по единице отнимали 6 от 21, что непросто и часто ведет к ошибкам. После подробного изучения стратегий, которые использовали ученики, исследователи пришли к выводу, что различие между сильными и слабыми состоит не в том, что последние хуже знают математику, а в том, что они иначе взаимодействуют с ней. Вместо того чтобы чувствовать числа, они упорно придерживались формальных схем, которые ранее выучили, и применяли их очень точно, не отказываясь от них даже тогда, когда в них не было смысла. Они не использовали гибкий подход к работе с числами — может быть, потому, что им с самого начала внушили, что нужно запоминать методы и факты о числах, а не гибко взаимодействовать с ними (Boaler, 2015). Исследователи отметили еще один важный момент: слабые ученики выбирают более трудные пути. Гораздо легче вычесть 5 из 20, чем начать с 21 и отсчитывать в обратном порядке. К несчастью для слабых учеников, их часто относят к числу тех, кто с трудом справляется с математикой, поэтому им дают больше заданий на закрепление материала, усиливая их убежденность в том, что успешное изучение математики сводится к запоминанию, а не пониманию и осмыслению. Таких детей направляют по гибельному пути; в итоге они плохо справляются с математикой на протяжении всей жизни.

Математическое мышление подразумевает активный подход к познанию, при котором ученики видят свою задачу в понимании и осмыслении материала. Чувство числа отражает глубокое понимание математики, и оно формируется при применении математического мышления, суть которого — в наполнении чисел и количества смыслом. Нужно развивать чувство числа у учеников — не только потому, что это основа высшей математики (Feikes & Schwingendorf, 2008), но и потому, что оно помогает сформировать математическое мышление, и знание способов развития одного способствует развитию другого.

На рисунке 4.1 стрелками обозначены методы, которые необходимо изучить, а в ячейках отражены изучаемые концепции. В нижнем левом углу представлен метод счета. Когда ученики

учатся считать, они запоминают порядок и названия чисел, но у них формируется и *концепция* числа — представление о нем. В самом начале обучения сложению ученики осваивают метод «продолжение счета». Он используется, когда заданы два числа (например, 15 и 4). В этом случае вы осваиваете сложение так: сначала считаете до 15, а затем продолжаете счет — 16–17–18–19. Изучая метод продолжения, ученики усваивают понятие суммы. Речь не о методе сложения, а о самой идее. На следующем этапе можно научиться складывать группы чисел, например три числа 4. Когда ученики осваивают этот навык, у них формируется концепция произведения. Здесь снова речь не о методе (в данном случае умножения), а об идее. Концепции числа, суммы и произведения требуют глубоких размышлений. Изучение методов, например сложения и умножения, должно быть не самоцелью, а элементом концептуального понимания чисел, суммы и произведения, а также их соотношения

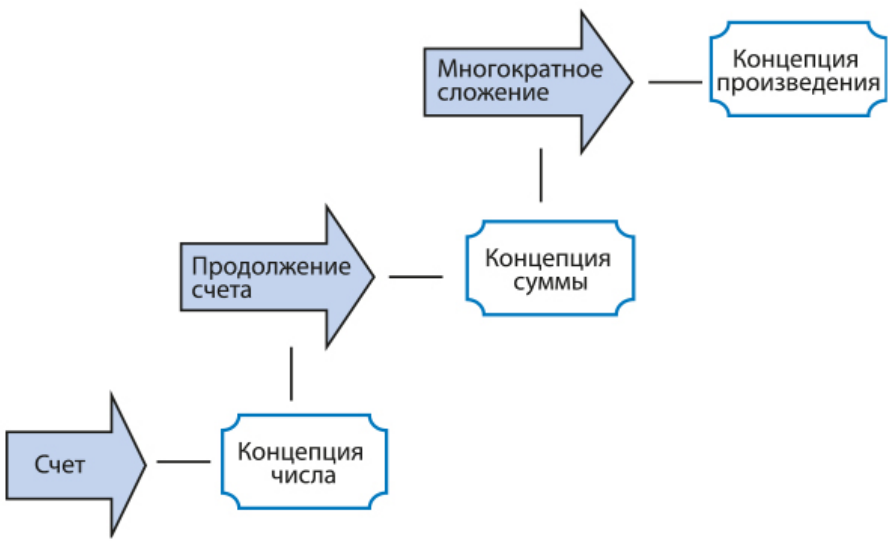


Рис. 4.1. Математические методы и концепции
Источник: Gray & Tall, 1994.

Когда мы занимаемся математикой, в нашем мозге происходит процесс *сжатия*. Когда вы изучаете область, о которой ничего не знаете, она занимает много места в вашем мозге: ведь вам нужно напряженно размышлять, как это работает и как разные концепции соотносятся друг с другом. Но математические понятия, которые вы изучили ранее и хорошо знаете (например, сложение), занимают в мозге небольшое пространство. Вы можете использовать эти знания, даже не задумываясь. Процесс сжатия происходит потому, что головной

мозг — крайне сложный орган, контролирующий много разных процессов, и в любой момент он может сосредоточиться только на нескольких несжатых концепциях. Те же, которые вы хорошо знаете, сжимаются и архивируются. Уильям Терстон, выдающийся математик, получивший Филдсовскую премию, так описывает процесс сжатия.

> Математика поразительно легко поддается сжатию: вы можете долго и напряженно трудиться, шаг за шагом прорабатывая один процесс или идею с нескольких точек зрения. Но как только вы по-настоящему поймете нечто и сможете увидеть это как единое целое, скорее всего, произойдет очень сильное ментальное сжатие. Вы можете отправить эту информацию в архив, а при необходимости быстро и полностью восстановить и использовать ее всего лишь за один шаг в рамках другого ментального процесса. Озарение, которым сопровождается такое сжатие, — одна из истинных радостей математики (Thurston, 1990).

Многие ученики не считают, что математика дарит «истинную радость» — отчасти потому, что в их мозге сжатия не происходит. Мозг способен сжимать только концепции, но не правила и методы. Следовательно, у учеников, которые не мыслят концептуально, а воспринимают математику как список правил, подлежащих запоминанию, сжатия не происходит, и их мозг не может упорядочивать концепции и архивировать их, а пытается хранить длинные списки методов и правил. Именно поэтому важно воспитать концептуальный подход к математике — основу математического мышления.

Как насчет фактов?

Многие убеждены, что невозможно постоянно размышлять над математикой на концептуальном уровне, поскольку существует много фактов (например, $8 \times 4 = 32$), которые надо запомнить. Однако все факты можно осваивать и запоминать в рамках концептуального подхода. К сожалению, большинство учителей и родителей считают, что некоторые области математики основаны на фактах (например, о числах) и их необходимо бездумно оттачивать и быстро заучивать. Но такой подход в первые годы в школе вредит ученикам, заставляя их думать, что преуспевать в математике — значит быстро вспоминать факты, и мешает им развивать математическое

мышление.

Сами математические факты — лишь небольшая часть науки, и их лучше изучать путем применения чисел разными способами и в разных ситуациях. К сожалению, часто математические факты рассматриваются по отдельности и у учеников создается впечатление, будто это суть дисциплины и, что еще хуже, умение быстро восстанавливать такие факты в памяти — признак хорошего ученика. Обе эти идеи ошибочны, их нельзя внушать ученикам. Ведь именно они приводят к появлению разочаровавшихся учеников, боящихся математики.

Я росла в Англии в прогрессивную эпоху, когда начальные школы были ориентированы на развитие цельной личности, поэтому мне не приходилось учить наизусть таблицы сложения, вычитания и умножения. Я никогда не заучивала факты, но могу быстро сгенерировать любой из них, поскольку у меня есть чувство числа и я освоила эффективные способы анализа числовых комбинаций. Отказ от заучивания никогда не был сдерживающим фактором для меня. И я стала профессором математики, поскольку у меня есть чувство числа, овладеть которым для учеников гораздо важнее, чем запомнить факты. Процесс формирования этого чувства сводится к изучению математических фактов вместе с глубоким пониманием чисел и их соотношений.

Примерно у трети учеников страх перед математикой возникает после того, как они начинают сдавать тесты с ограничением времени (Boaler, 2014c). Сайен Бейлок и ее коллеги изучали мозг участников исследования с помощью МРТ и пришли к выводу, что математические факты хранятся в кратковременной памяти. Но когда ученики находятся в состоянии стресса (например, если им приходится отвечать на вопросы в условиях ограничения времени), кратковременная память блокируется и ученики не могут получить доступ к математическим фактам, которые они знают (Beilock, 2011). Когда ученики осознают, что не могут эффективно выполнять тесты с ограничением времени, они начинают тревожиться и теряют уверенность в своих математических способностях. Блокировка кратковременной памяти и связанная с этим тревога особенно распространены среди сильных учеников и девочек. По самым скромным оценкам, минимум треть учеников испытывает очень сильный стресс во время тестов с ограничением времени, причем независимо от своей успеваемости или уровня благосостояния. Если мы постоянно подвергаем учеников такому испытанию, можно считать их потерянными для математики.

Уже установлено, что страх перед математикой испытывают

даже пятилетние дети, а тесты с ограничением времени — основная причина этого деструктивного состояния, которое частенько остается у человека на всю жизнь. На своих курсах в Стэнфордском университете я сталкиваюсь со многими студентами, которые испытали психологическую травму в связи с математикой, хотя и добились самых серьезных успехов в учебе. Когда я спрашиваю их, что вызвало у них такое отвращение к математике, многие говорят о том, что именно тесты во втором или третьем классе привели их к выводу, что математика не для них. Некоторые из этих студентов, особенно девушки, рассказывают, что им необходимо было все глубоко понимать (достойная цель). Но когда тесты с ограничением времени стали неотъемлемой частью уроков математики, у них возникло ощущение, что глубокое понимание не ценится или не требуется. Возможно, эти студенты выполняли другую, более важную работу на уроках математики, сосредоточившись на осмыслении и понимании, а тесты на скорость вызывают такие сильные эмоции, что ученики приходят к выводу, будто способность быстро запоминать факты — сама суть математики. Это очень печально. Последствия сосредоточения на запоминании и проведении тестов проявляются в том, что многие бросают математику, и сейчас в этой науке возник кризис (см. www.youcubed.org). Когда в пять лет моя дочь начала изучать таблицу умножения и сдавать тесты, она приходила домой в слезах. Это совсем не те эмоции, которые должны ассоциироваться с математикой, но если мы и впредь будем требовать от детей вспомнить математические факты за ограниченное время, мы не сможем ликвидировать тревогу и неприязнь к математике (Silva & White, 2013).

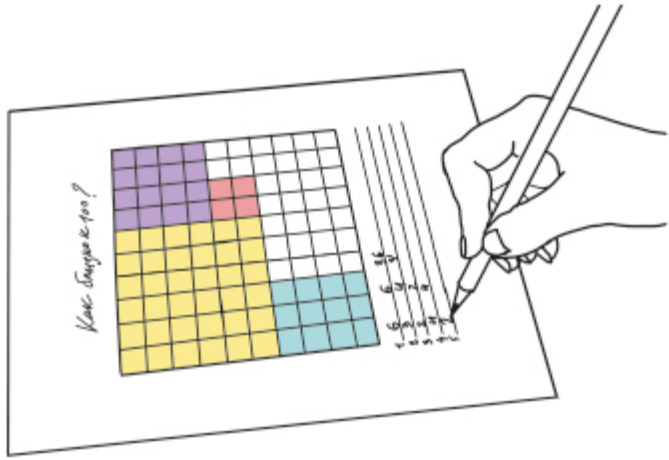
Что же сделать, чтобы помочь ученикам усвоить математические факты без тестов? Лучший способ стимулировать изучение фактов и формирование математического мышления — предлагать ученикам концептуальные задания, которые помогут им исследовать и понимать числа и факты о них. Исследователи головного мозга проанализировали поведение учеников, изучающих математику двумя способами. Один подход состоял в использовании стратегий. Например, чтобы запомнить, сколько будет 17×8, можно вычислить 17×10 (170) и вычесть из результата 17×2 (34). Другой способ — просто запомнить факт ($17 \times 8 = 136$). Ученые пришли к выводу, что эти подходы подразумевают использование разных путей в головном мозге, и оба этих пути можно использовать всю жизнь. Но важнее другое: по данным того же исследования, ученики, которые использовали стратегии, добивались гораздо более высоких результатов по сравнению с теми, кто запоминал факты; они отвечали на

вопросы теста с такой же скоростью и демонстрировали более правильный переход к новым задачам. Ученые пришли к выводу, что автоматизм следует вырабатывать за счет понимания соотношений между числами, которое достигается в процессе размышлений над числовыми стратегиями (Delazer et al., 2005).

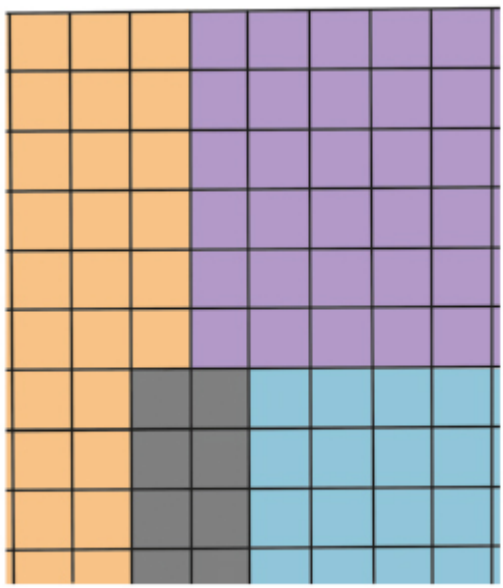
В ходе другого важного исследования было установлено, что обучение эффективнее всего тогда, когда мы используем разные пути в головном мозге (Park & Brannon, 2013). Левое полушарие отвечает за обработку фактической и технической информации; правое — визуальной и пространственной. Ученые пришли к выводу, что изучение математики и результаты носят оптимальный характер, когда полушария мозга обмениваются информацией (Park & Brannon, 2013). Также выяснилось, что при работе над арифметическими задачами, например на вычитание, лучшие результаты получили ученики с самыми сильными связями между полушариями мозга. Это крайне важно для изучения математики. Получается, изучение формальной абстрактной математики, как в школьной учебной программе, более эффективно, когда дети используют визуальное и интуитивное математическое мышление.

В статье YouCubed «Свободное владение математикой без страха», которая оказалась в центре внимания ряда крупных новостных СМИ, мы представили все эти факты и задания, которые учителя и родители могут использовать, чтобы создать условия для формирования этих важных связей в головном мозге. Одна из математических игр, которую мы включили в статью, сразу после публикации стала очень популярной и распространилась с помощью твитов по всему миру.

Участвует несколько учеников. Каждый получает лист бумаги, на котором изображена матрица из 100 пустых ячеек. Первый игрок бросает два игральных кубика и использует выпавшие числа для построения массива в своей матрице из 100 ячеек. Участник может разместить этот массив на любом участке матрицы, но задача в том, чтобы максимально заполнить ее. Зарисовав массив ячеек в своей матрице, игрок записывает числовое выражение, описывающее его. Игра заканчивается, когда после бросания костей ни один игрок не может внести соответствующий массив ячеек в матрицу (рис. 4.2).



А. Кто ближе к 100?



Б. У кого больше закрашенных ячеек?

Рис. 4.2. Насколько близко к 100?

В этой игре ученики изучают числовые факты, например значение 2×12, но не это главное. Они размышляют над смыслом числовых фактов и над тем, что представляет собой 2×12 в визуальном и пространственном виде.

Есть еще одна игра, стимулирующая формирование сильных связей в головном мозге. В ней применяется совсем иной подход к математическим карточкам, который часто вредит детям, как в

случае флеш-карточек, ориентированных на зубрежку и высокую скорость запоминания. Цель игры в том, чтобы подобрать карточки с одинаковыми ответами, представленными разными способами, без временных ограничений. Учителя раскладывают карточки на столе и предлагают ученикам по очереди выбирать как можно больше карточек с одинаковыми ответами (представленными в любом виде).

Например, числа 9 и 4 могут быть представлены в виде матрицы, группы предметов (костяшек домино и т. п.) и числового выражения. Подбирая карточки, ученик должен объяснить, почему он решил, что разные на вид карточки эквивалентны. Такое задание также помогает понять суть умножения на визуальном и пространственном уровне, что стимулирует формирование связей в мозге ученика и позволяет ему повторить математические факты. Чтобы усложнить задание, игру можно проводить с карточками, повернутыми лицевой стороной вниз, превратив ее в игру на запоминание. Полный набор карточек есть здесь: http://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2015/03/FluencyWithoutFear-2015.pdf (рис. 4.3).

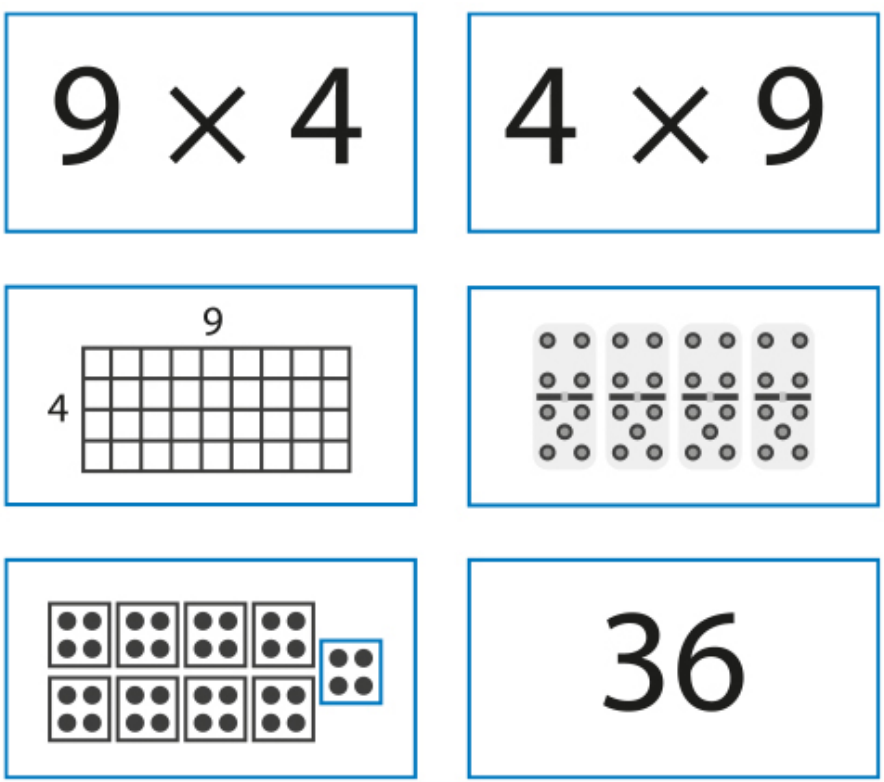


Рис. 4.3. Математические карточки
Источник: www.youcubed.org.

Такие задания развивают чувство числа и математическое мышление, способствуют формированию новых связей между полушариями головного мозга. Полная противоположность этому подходу — фокус на зубрежке и скорости. Чем больше мы акцентируем внимание учеников на запоминании, тем меньше они стараются задумываться над числами и взаимосвязями между ними, зато развивают и используют чувство числа (Boaler, 2015). Некоторым запоминание математических фактов дается нелегко. Это можно только приветствовать — как свидетельство многообразия жизни и людей.

Представьте себе, как было бы ужасно, если бы учителя проводили тесты на знание математических фактов, а все ученики давали одинаковые ответы с одинаковой скоростью, будто роботы. В ходе одного из последних исследований ученые изучали мозг детей в то время, когда те запоминали математические факты; оказалось что некоторые запоминают факты гораздо лучше других. Это неудивительно: многие считают, что это характерно для более сильных или более умных учеников. Но исследователи обнаружили, что эти дети не относятся к числу сильных, не обладают тем, что исследователи описали как более высокий уровень математических способностей, или более высоким показателем IQ (Supekar et al., 2013). Единственное различие касалось области мозга под названием гиппокамп, которая отвечает за запоминание фактов. Он, как и другие области головного мозга, может увеличиваться в объеме в любом возрасте, как показывают результаты исследования с участием лондонских водителей такси Black Cab (Woollett & Maguire, 2011). Но разные ученики всегда будут запоминать факты с разной скоростью, и *их математические способности тут ни при чем*.

Рассказ учительницы о психологической травме в связи с запоминанием математических фактов

Во время последнего семинара по профессиональному развитию, который я проводила с учителями из Калифорнии, я рассказала, что в детстве не учила таблицу умножения наизусть. Я отметила, что это никогда не сдерживало меня в жизни, хотя я каждый день занимаюсь математикой. Когда я рассказала об этом перед аудиторией учителей, четыре женщины

расплакались. Во время обеда одна из этих учительниц рассказала мне, всхлипывая, что мои слова изменили для нее всё. В детстве у нее были трудности с заучиванием таблицы умножения, и ее отец дал ей понять, что она в каком-то смысле неполноценна. Эта учительница всю свою жизнь считала, что с ней что-то не так. Она рассказала мне, что директор школы присутствовал на ее занятиях и она боялась, что ее «неполноценность» будет обнаружена. Акцент на тестах с ограничением времени и запоминании математических фактов причинил вред очень многим людям.

Чтобы успешно изучать язык и литературу, читать и понимать прозу или поэзию, необходимо запоминать значение множества слов. Но ни один ученик, изучающий язык и литературу, не скажет и не подумает, что весь процесс сводится к быстрому запоминанию слов и их восстановлению в памяти. Ведь мы изучаем слова, используя их во множестве разных ситуаций: когда разговариваем, читаем и пишем. Учителя-словесники не заставляют детей запоминать сотни лексических единиц и не проверяют их в условиях ограничений времени. Все дисциплины требуют запоминания тех или иных фактов, но математика — единственный предмет, преподаватели которого убеждены в необходимости тестов с ограничением времени. Почему так? У нас есть результаты исследований, подтверждающие, что ученики могут гораздо эффективнее усваивать математические факты в рамках увлекательных занятий; пора с их помощью избавить учеников от страха математики.

Насколько важна практика в математике?

Когда я предъявляю родителям и учителям доказательства того, что детям нужно заниматься математикой на концептуальном и визуальном уровнях, некоторые спрашивают: «Разве не нужно много практиковаться?» Под практикой при этом подразумеваются многие страницы отдельных заданий по математике. Нужна ли ученикам практика по математике и в каком виде — вопрос интересный. Мы знаем, что процесс обучения сопровождается возбуждением синапсов, а чтобы в мозге произошли структурные изменения, нужно не единожды рассматривать идеи и глубоко изучать их. Но что это значит? Математические концепции действительно важно рассматривать неоднократно, но снова и снова «отрабатывать» методы

бесполезно. Когда вы изучаете новую концепцию, стоит закрепить ее, и лучший способ сделать это — использовать ее разными способами. Мы вредим ученикам, когда формулируем самый простой вариант концепции и даем 40 заданий, в которых используется только он. Листы с письменными заданиями, в которых многократно повторяется одна и та же концепция, отталкивают учеников от математики; в них нет нужды, поскольку они не учат применять концепцию в разных ситуациях.

В своем бестселлере «Гении и аутсайдеры»[11] Малкольм Гладуэлл развивает идею о том, что для достижения высокого уровня мастерства в любой области нужны примерно 10 тысяч часов практики. Гладуэлл описывает достижения знаменитых музыкантов, шахматистов и спортсменов, отмечая при этом один важный момент. Многие считают, что такие люди, как Бетховен, гениальны от рождения. А Гладуэлл показывает, что они долго и упорно трудятся, чтобы добиться серьезных результатов, и обладают мышлением роста, которое помогает им в работе. К сожалению, многие люди, с которыми я беседовала, интерпретируют идею Гладуэлла так, будто ученики могут овладеть математикой на высоком уровне после 10 тысяч часов бездумной практики. Это неверно. Овладение математикой требует работы в истинном математическом смысле. Нам не нужно, чтобы ученики снова и снова отрабатывали один и тот же метод. Это не математика; такой подход не дает знания идей, концепций и взаимосвязей, позволяющего овладеть наукой на высоком уровне. В эти 10 тысяч часов необходимо изучать математику в целом, анализируя ее концепции и связи, решая задачи, делая умозаключения и связывая разные методы воедино.

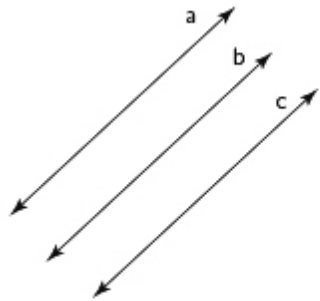
Авторы большинства учебников в США используют стандартный подход, когда необходимо выделить методы, свести их к простейшей форме, а затем отрабатывать. Это создает ряд проблем. Во-первых, изучение отдельных методов вызывает скуку; многие дети теряют интерес к математике, когда им кажется, что их роль состоит в пассивном принятии конкретного метода (Boaler & Greeno, 2000) и его многократном повторении. Во-вторых, в большинстве практических заданий показан самый простой и обособленный вариант метода, поэтому ученики не имеют ни малейшего представления о том, когда и как еще они могут применить его.

Примеры концепций в учебниках тоже не показательны: составители пособий всегда выбирают самый простой вариант. В примере 4.1 приведены ответы учеников на математические вопросы в ходе научных исследований, а также отмечен характер проблемы, вызванной традиционной постановкой вопросов в

учебниках.

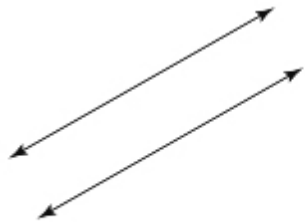
ПРИМЕР 4.1

Ученикам в возрасте 11 лет показали следующий рисунок и задали вопрос: прямая *a* параллельна прямой *c*?



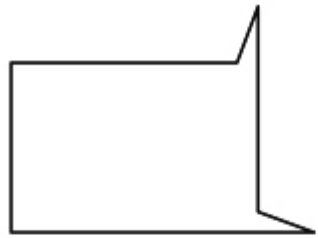
Три параллельные прямые

Большинство учеников дали ответ: «Нет, потому что между ними находится прямая *b*». Причина в том, что понятие параллельности почти всегда иллюстрируют рисунком с двумя прямыми.



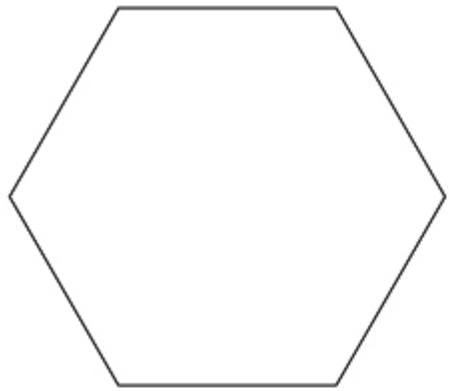
Две параллельные прямые

Затем учеников попросили назвать следующую фигуру.



Неправильный шестиугольник

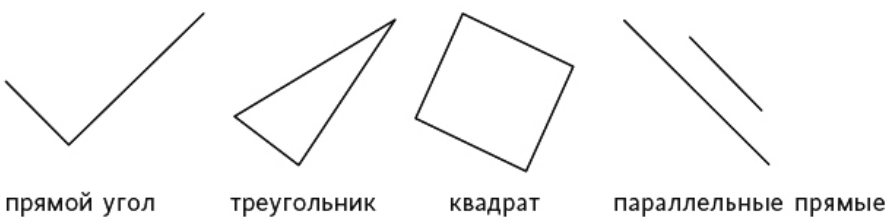
Большинство не смогли этого сделать. На рисунке изображен шестиугольник (многоугольник с шестью сторонами), но шестиугольники почти всегда показывают в таком виде.



Правильный шестиугольник

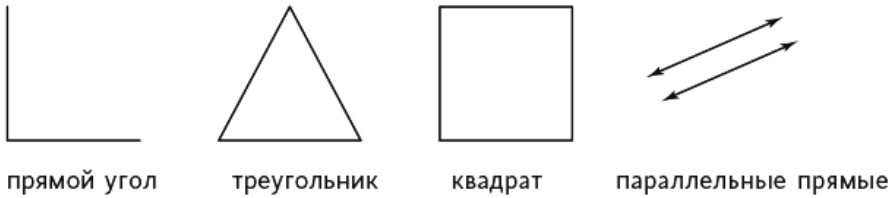
Это не отражает в полной мере концепцию шестиугольника.

Более половины учеников восьми лет не воспринимают представленные ниже фигуры как прямой угол, треугольник, квадрат и параллельные прямые…



Незнакомые изображения геометрических концепций

…поскольку им всегда показывают самый простой вариант. Вот знакомые изображения, которые ученики ожидают увидеть.



Знакомые изображения геометрических концепций

Итак, более половины учеников, принимавших участие в исследовании, не смогли правильно назвать фигуры. И вот что это значит: когда в учебниках приводится только самый простой вариант идеи, ученики не могут узнать, в чем состоит ее суть. Дети не смогли правильно опознать разные объекты, поскольку авторы учебников неизменно приводят «идеальные примеры». Когда ученики изучают какое-то понятие, вместо идеальных примеров целесообразно предлагать им разные, чтобы некоторые из них едва отвечали этому определению, а некоторые вообще не соответствовали ему.

Учителя математики должны также давать достаточно широкое определение той концепции, которую изучают ученики, и иногда это лучше всего сделать с помощью *правдоподобных, но ложных примеров*. В процессе изучения определения часто полезно приводить как примеры, отвечающие ему, так и не отвечающие ему, а не идеальные варианты. Например, когда ученики изучают птиц, стоит напомнить им о летучих мышах и предложить подумать, почему они не относятся к птицам, а не рассматривать все больше изображений воробьев, ворон и других птиц.

Неправильное понимание концепций, возникающее у учеников при рассмотрении идеальных примеров, аналогично проблемам, возникающим при отработке обособленных методов. Ученикам дают несложные ситуации, требующие простого применения процедур (а во многих случаях никаких ситуаций и нет). Ученики изучают метод, но, когда им дают математические задачи или нужно использовать математику в реальном мире, они не могут применить его (Organisation for Economic Co-operation and Development, 2013). Реальные задачи зачастую требуют отбора и адаптации методов, применению которых дети никогда не учились и даже не знают о них. В следующей главе мы

проанализируем характер содержательных математических задач, позволяющих избежать таких проблем.

В ходе знаменитого научного исследования в Англии я три года отслеживала успеваемость учеников при применении подхода к изучению математики, основанного на практике. Дети снова и снова отрабатывали на уроках обособленные примеры (Boaler, 2002a). Я сравнила их результаты с результатами, полученными в случае, когда ученикам демонстрировали всю сложность математики. При этом предполагалось, что дети должны постоянно размышлять на концептуальном уровне, выбирая и применяя те или иные методы. Два этих подхода к преподаванию математики использовались в разных школах в работе с учениками одинакового происхождения и уровня успеваемости, причем обе школы находились в небогатых районах. Дети, которых учили многократно отрабатывать методы в школе с жесткими требованиями ко времени выполнения заданий, получили гораздо более низкие оценки во время государственного экзамена по математике по сравнению с теми, кого стимулировали размышлять на концептуальном уровне. Во время государственного экзамена (включающего ряд процедурных вопросов) ученики традиционной школы столкнулись с серьезной проблемой: они не знали, какой метод выбрать, чтобы найти ответы. Они многократно отрабатывали методы, но им никогда не предлагали проанализировать ситуацию и выбрать подходящий. Вот размышления двух учеников этой школы о трудностях, с которыми они столкнулись во время экзамена.

> Это глупо. Когда ты на уроке выполняешь задание (даже трудное), то получаешь от силы один-два неправильных ответа. Но большинство ответов правильные, и ты думаешь: «Ну вот, когда будет экзамен, я смогу ответить на большинство вопросов правильно». Ведь ты правильно понял все темы. А на самом деле ты ничего не понял (Алан, Эмбер-Хилл).
>
> Все совсем иначе. Все не так, как тебе говорили, — описание, вопрос; все не так, как в учебниках, как объясняет учитель (Гэри, Эмбер-Хилл).

Чересчур упрощенный подход к математике — одна из причин проблем в ее изучении. Вдобавок у учеников не развивается математическое мышление: им внушают, что на уроках математики нет места размышлениям и осмыслению концепций, требуется лишь многократное повторение определенных методов.

В ходе еще одного исследования, которое было проведено

в США, мы спрашивали детей, которых обучали математике по модели отработки методов, какова их роль на уроках по этому предмету (Boaler & Staples, 2005). Поразительно много учеников (97%) дали один и тот же ответ: «Максимально сосредоточиться». Этот пассивный акт наблюдения (а не размышлений, построения логических выводов или осмысления) не приводит к пониманию предмета или формированию математического мышления.

Ученикам часто дают практические задания по математике на дом. Но многие данные демонстрируют, что домашние задания в любой форме бесполезны или губительны (подробнее см. главу 6). У меня есть дети, и домашние задания — самая распространенная причина слез в нашем доме, а математика — предмет, работа над которым дома вызывает у детей самый сильный стресс, особенно если задание представляет собой длинный список разрозненных вопросов.

Ученики получают целые страницы домашних заданий по математике. Кажется, никому нет дела до того, как плохо это влияет на обстановку в доме. Но есть надежда: в школах, где заданий на дом не дают, успеваемость не снижается; при этом в семьях учеников существенно повышается качество жизни (Kohn, 2008).

Результаты крупных научных исследований показали, что домашние задания практически не влияют на уровень успеваемости (Challenge Success, 2012), но при этом создают заметное неравноправие (Program for International Student Assessment, 2015). Мы вернемся к этой проблеме в главе 6. Задания на дом играют крайне негативную роль в жизни многих родителей и детей. Исследования показывают, что единственный случай, когда она эффективна, — если ученики получают ценный учебный опыт, а не листы с задачами, и когда она рассматривается не как норма, а как возможность время от времени давать ученикам содержательные задания. Мои дочки учатся в школах, где знают о результатах научных исследований о домашней работе, поэтому обычно дают ученикам только полезные задания по математике (например, головоломки KenKen[12]). Но и там учителя время от времени давали детям по 40 задач на вычитание или умножение. Я видела, как у моих детей портится настроение, когда они получают такие задания. В такие моменты я объясняю им, что целая страница однотипных вопросов — это не настоящая математика, а когда они успешно выполняют несколько заданий (обычно четыре или пять), я предлагаю им прекратить работу. Затем я пишу учителю записку, что я вполне удовлетворена тем, как мои дети поняли метод, и не хочу, чтобы они отвечали еще на 35 вопросов, поскольку из-за

этого у них сформируется пагубное представление о математике.

Если вы работаете в школе, где домашняя работа обязательна, можно использовать задания, которые гораздо более эффективны, чем страницы однотипных вопросов. Екатерина Мильвидская и Тиана Тебельман, два учителя-новатора, с которыми я работаю в объединенном школьном округе Виста, создали перечень вопросов для домашней работы. Они каждый день выбирают вопросы, позволяющие их ученикам более глубоко проанализировать и понять математические концепции, которые они изучали в тот день. Как правило, на один вечер ученикам дают по одному вопросу для размышлений и одно — пять заданий (в зависимости от сложности), которые нужно выполнить. В примере 4.2 представлены некоторые из этих вопросов.

ПРИМЕР 4.2. ВОПРОСЫ ДЛЯ РАЗМЫШЛЕНИЙ: ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Часть 1. Вопросы, требующие письменного ответа

** Ответ на вопрос(ы) должен быть очень подробным! Пожалуйста, используйте полные предложения и будьте готовы сформулировать свой ответ на уроке на следующий день.*

1. Какие основные математические концепции или идеи вы изучили сегодня; что вы обсуждали на уроке сегодня? ___
2. Какие вопросы у вас остались по поводу ___? Если у вас нет вопросов, придумайте аналогичную задачу и решите ее.
3. Опишите ошибку или заблуждение, которое возникло у вас или у кого-то из одноклассников сегодня на уроке. Что вы узнали благодаря этому? ___
4. Какой подход вы или ваша группа использовали для решения задачи или ряда задач? Был ли ваш подход эффективным? Какой урок вы извлекли из этого подхода?
5. Подробно опишите алгоритм решения этой задачи, который использовал на уроке кто-то другой. Чем он был похож на ваш подход и чем отличался от него? ___
6. Какие новые слова или термины были

представлены сегодня? Что, по вашему мнению, означает каждое новое слово? Приведите пример каждого слова (или нарисуйте то, что оно означает) ___

7. Вокруг чего развернулась самая серьезная математическая дискуссия на уроке сегодня? Что вы узнали из нее? ___

8. В чем сходство или различие между ___ и ___?

9. Что произошло бы, если бы вы изменили ___?

10. В чем были ваши сильные и слабые места в работе над этой темой? Как вы планируете исправить слабые места? ___

Материал предоставлен Екатериной Мильвидской и Тианой Тебельман на условиях лицензии Creative Commons Attribution 3.0.

Екатерина и Тиана, применявшие эти вопросы на протяжении двух лет, отметили положительное влияние такого подхода на учеников. Теперь они размышляют над тем, что узнали на уроке, синтезируют идеи и задают больше вопросов.

В середине каждого учебного года Екатерина и Тиана проводят среди своих учеников опрос, чтобы собрать данные и получить обратную связь о методах преподавания, в том числе новом подходе к домашним заданиям. Вот некоторые отзывы о новом формате домашних заданий.

> Думаю, наш способ выполнения домашней работы очень полезен. Когда тратишь больше времени на размышления над тем, что мы изучали (письменный ответ), и меньше времени на выполнение дополнительных заданий по математике (учебник), узнаёшь намного больше.
>
> Мне кажется, что вопросы, которые задают нам на дом, помогают мне поразмышлять над тем, что мы изучали в тот день. Если я что-то плохо помню, я могу заглянуть в свою тетрадь.
>
> Мне правда нравится домашняя работа в этом году. Благодаря вопросам для размышления я понимаю, как выполнять задание; они помогают мне, потому что я могу вспомнить, что было на уроке в тот день.
>
> Вопросы для размышлений мне очень помогают. Я вижу, над чем мне нужно поработать и что я делаю правильно.

Ученики говорят о том, как вопросы для размышлений помогают им изучать математику. Они вызывают гораздо меньше

стресса, что всегда важно; они побуждают размышлять над серьезными идеями на концептуальном уровне, что просто бесценно. Вопросы, которые побуждают анализировать ошибки и заблуждения, особенно полезны для стимулирования самоанализа и часто помогают лучше понимать математику. Кроме того, из ответов на них учителя получают крайне важную информацию, которая может направлять их в процессе преподавания. Аналогичные вопросы можно ставить ученикам в конце урока в качестве «билетов на выход». В главе 8 я поделюсь другими идеями по поводу вопросов для размышлений.

Как было сказано в главе 1, группа PISA, которая работает в рамках ОЭСР, не только проводит тесты по математике среди учеников, но и собирает данные об убеждениях учеников и математических стратегиях. Результаты анализа данных о стратегиях, которые используют 13 миллионов учеников, свидетельствуют о том, что хуже всего с тестами справляются дети, применяющие стратегию запоминания. Самые высокие результаты получают ученики, которые придерживаются подхода, основанного на анализе важных концепций и связей между ними. На рисунке 4.4 показаны различия в результатах тестирования учеников, использующих разные стратегии.

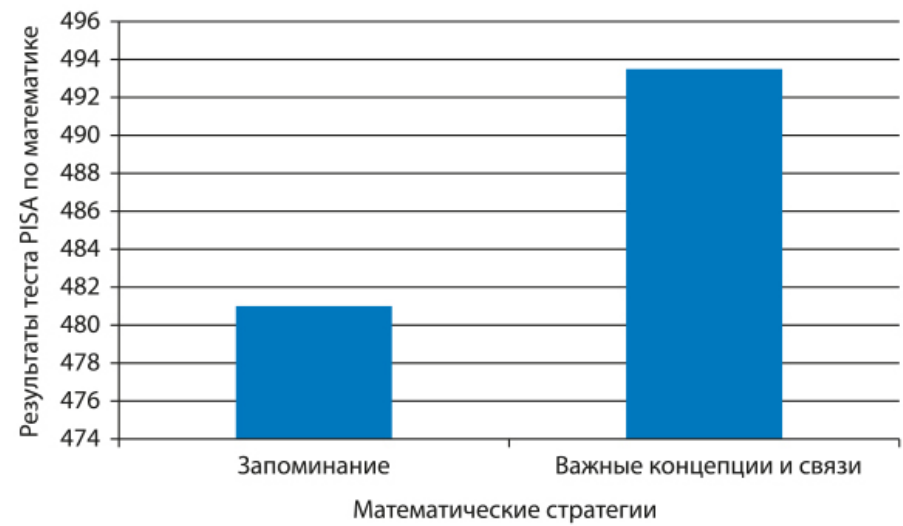


Рис. 4.4. Математические стратегии и результаты тестов
Источник: PISA, 2012.

Лучшее, что мы можем сделать для учеников, — помочь им развить математическое мышление, понять, что суть математики — размышления, осмысление, важные идеи и связи, а не запоминание.

Превосходная методика подготовки учеников к процессу мышления и обучения (основанному на понимании связной, концептуальной природы математики) — стратегия под названием «Разговоры о числах». Это лучшая из известных мне стратегий одновременного обучения чувству числа и математическим фактам. Метод разработали Рут Паркер и Кэти Ричардсон. Это идеальное короткое обучающее упражнение, с которого учителя могут начинать урок и которое родители могут использовать дома. Необходимо поставить абстрактную математическую задачу и попросить учеников показать, как они в уме решат ее. Затем учитель собирает разные методы, которые используют ученики, и анализирует, почему они работают. Предложив ученикам найти произведение 15×12, учитель может выяснить, что они решили эту задачу пятью разными способами.

15 x 10 = 150 15 x 2 = 30 150 + 30 = 180	30 x 12 = 360 360 ÷ 2 = 180	12 x 15 = 6 x 30 6 x 30 = 180	12 x 5 = 60 12 x 10 = 120 120 + 60 = 180	12 x 12 = 144 12 x 3 = 36 144 + 36 = 180

Ученики любят рассказывать о своих стратегиях; как правило, они увлеченно и с интересом анализируют разные методы, используемые при решении задач. Ученики осваивают ментальную математику, у них появляется возможность запомнить факты, а также формируется концептуальное понимание чисел и арифметических свойств, что крайне важно для успешного изучения алгебры и других разделов математики. Существует две книги, одну из которых написали Кэти Хамфриз и Рут Паркер (Humphreys & Parker, 2015), а другую — Шерри Пэрриш (Parrish, 2014), где представлено описание множества разговоров о числах, которые можно использовать в работе с учениками средней и начальной школы соответственно. Объяснение стратегии «Разговоры о числах» можно также найти на видео на сайте YouCubed. Это фрагмент моего онлайн-курса для учителей и родителей (https://www.youcubed.org/categorteachingideas/number-sense).

Беседы о числах — лучший из известных мне педагогических методов, позволяющих развивать у учеников чувство числа и помочь им понять гибкую и концептуальную природу математики.

Как быть с учениками постарше?

Мы много говорили о том, как обучать детей математике с помощью концептуального подхода, а также формированию представления о том, что математика — предмет, который должен быть наполнен смыслом и который можно изучать в рамках активного подхода. Лучше всего выбрать этот вариант с самого начала, но подход к математике и отношения с ней можно изменить в любое время. В следующей главе мы поговорим об учениках средней школы и взрослых, которые ненавидели математику, воспринимая ее как сугубо процедурную дисциплину. Но когда им рассказали о возможностях, обеспечиваемых мышлением роста, они начали использовать другие методы обучения. Я видела, как такие перемены происходят с учениками всех возрастов, в том числе со студентами Стэнфорда. На рисунке 4.5 показано влияние воздействия на мышление во время весеннего семестра в седьмом классе (Blackwell, Trzesniewski, & Dweck, 2007). Результаты исследований свидетельствуют, что после перехода в среднюю школу относительный уровень успеваемости учеников снижается, но у тех, на мышление которых было оказано воздействие, спад приостановился и началось повышение уровня успеваемости.

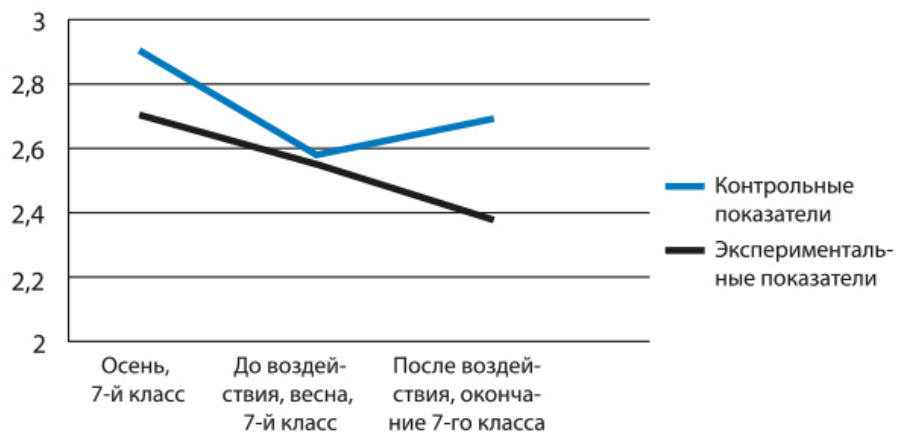


Рис. 4.5. Воздействие на мышление учеников
Источник: Blackwell et al., 2007.

Сигналы в отношении мышления очень важны для учеников, а когда они сопровождаются благоприятными возможностями для изучения математики, происходят поразительные события — и неважно, сколько лет ученикам.

Математические игры и приложения

Еще один способ предоставления ученикам возможностей для формирования вдумчивого, концептуального подхода к математике — применять игры и приложения, помогающие изучать дисциплину на концептуальном уровне. Подавляющее большинство математических игр и приложений бесполезны, поскольку ориентированы на выполнение однотипных заданий и запоминание. В данном разделе уделено особое внимание четырем приложениям, которые я считаю очень полезными: они позволяют ученикам заниматься концептуальной математикой с помощью визуальных инструментов. Я консультант трех из четырех компаний, разработавших эти игры и приложения (Wuzzit Trouble, Mathbreakers и Motion Math).

Wuzzit Trouble

Wuzzit Trouble (игра, которую разработали стэнфордский математик Кит Девлин и его команда) помогает ученикам исследовать важные математические концепции (сложение и вычитание, множители и кратные числа и т. п.) наряду с освоением гибкого подхода к работе с числами и стратегий решения задач. Цель игры — освободить маленькое существо из ловушки, повернув небольшую шестеренку, чтобы запустить колесо и собрать ключи. Уровень сложности повышается до действительно трудных головоломок. Есть разные версии этой игры, рассчитанные на определенные математические темы и уровни сложности.

Игра от компании BrainQuake работает на основе операционных систем iOS и Android; ее можно бесплатно загрузить с сайта http://wuzzittrouble.com.

Mathbreakers

Mathbreakers от Imaginary Number — видеоигра для учеников начальной школы, в которой персонажи передвигаются в игровой среде, вооружившись числами. Она не только позволяет ученикам играть с математикой, что само по себе очень важно, но и дает им возможность выполнять действия с числами — например, делить пополам, если игроку необходимо меньшее число, чтобы перейти мост. Это «бродилка» с участием чисел. Она знакомит учеников с числами на концептуальном уровне, в увлекательной открытой среде.

Mathbreakers работает на основе Mac, Windows и Linux (https://www.mathbreakers.com).

Number Rack

Number Rack от Math Learning Center — приложение для

учеников начальной школы, которое моделирует обучающий инструмент под названием Rekenrek («Счеты»), разработанный в Институте Фройденталя в Голландии (http://www.k-5mathteachingresources.com/Rekenrek.html). Счеты Rekenrek — десять костяшек, нанизанных на стержень; чтобы получить числа больше десяти, можно добавить дополнительные стержни. В игре есть экран, которым можно прикрыть группы костяшек, чтобы ученики могли находить отсутствующее число в том или ином соотношении. Это удобный инструмент для счета и работы с десятью числами. Ученики могут передвигать костяшки и работать с числовыми парами и соотношениями на концептуальном уровне.

Number Rack есть в интернете в бесплатном доступе (http://www.mathlearningcenter.org/web-apps/number-rack).

Motion Math

Приложение Motion Math, выпускаемое одноименной компанией, ориентировано на учеников начальной школы. Это ряд игр, которые помогают детям развивать визуальное понимание важных математических концепций, в частности чисел и дробей. Например, в игре Hungry Fish ученики соединяют числа, чтобы покормить рыбу. Игрокам нужно находить разные способы создания чисел. В игре Pizza игроки управляют пиццерией, готовя и продавая еду. В ходе игры ученики осваивают пропорциональное мышление, ментальную математику и даже азы экономики. В игре Fractions ученики перемещают шарик с определенной дробью в соответствующее место на числовой прямой. Игра Cupcake позволяет ученикам управлять собственным бизнесом. Игрок принимает решения по поводу кексов, доставляет их на своем автомобиле и вносит математические коррективы в заказы.

Motion Math работает на основе iOS и Android (http://motionmathgames.com).

Есть и другие игры и приложения, помогающие ученикам развивать чувство числа. Они позволяют глубже понять смысл изучаемых математических концепций, а также помогают *увидеть* математические идеи.

Резюме

Результаты новых исследований головного мозга свидетельствуют, что разница между преуспевающими и отстающими учениками обусловлена скорее не тем, какой

материал они изучают, а типом их мышления. Мышление роста крайне важно, но, чтобы дети добивались больших успехов в изучении математики, необходимо математическое мышление. Нужно привить ученикам установку на рост в отношении себя в сочетании с установкой на рост в отношении математики и их задач в изучении этого предмета. При концептуальном, исследовательском подходе к преподаванию математики, а также стимуляции мышления ученики научатся избавляться от пагубных представлений о том, что для изучения математики необходимы только скорость и память и что человек либо способен понять ее, либо нет. Такое изменение мышления — главное условие успеха и получения удовольствия от математики, и оно может произойти даже в зрелые годы. Данная глава сфокусирована на том, как оно происходит в ранние годы, особенно при изучении чисел, но сформулированные здесь идеи применимы ко всем уровням математики. Даже математические факты, один из самых скучных аспектов этой науки, можно объяснять ученикам на концептуальном уровне, добиваясь осмысления и понимания. Если описывать ученикам интересные ситуации и предлагать им наполнить эти ситуации смыслом, они будут иначе воспринимать математику — не как неизменную совокупность знаний, а как открытый мир, который можно исследовать, задавая вопросы и размышляя о взаимосвязях. В следующей главе представлен ряд лучших способов создания такой среды с помощью содержательных и увлекательных математических задач.

Глава 5. Содержательные математические задачи

Учителя — самый важный ресурс для учеников. Именно учителя создают увлекательную среду для освоения математики, подают позитивные сигналы, в которых дети так нуждаются, и добиваются того, чтобы любая задача пробуждала интерес. Исследования свидетельствуют, что учитель оказывает на обучение учеников большее влияние, чем любой другой фактор (Darling-Hammond, 2000). Но есть еще один крайне важный аспект изучения математики (во многих смыслах это лучший друг учителя): программа, с которой работает учитель, а также задания и вопросы, с помощью которых ученики осваивают этот предмет. Все учителя знают, что интересные математические задачи — прекрасный ресурс. Именно они определяют разницу между счастливыми учениками, которые с воодушевлением изучают математику, и незаинтересованными, немотивированными. Задания и вопросы помогают развивать математическое мышление и создают условия для глубокого, связного восприятия изучаемого материала. В этой главе представлен подробный анализ истинной вовлеченности в изучение математики, а также рассматривается вопрос о том, как добиться ее путем постановки математических задач.

Я преподавала математику на всех уровнях среднего и высшего образования в Англии и США. Кроме того, я изучила сотни заданий по математике на всех уровнях 16-летнего образования в обеих странах и проанализировала, как дети и подростки изучают математику и какие условия благоприятны для этого. Мне удалось накопить богатый опыт — и это большая удача по многим причинам, одна из которых состоит в том, что это помогло мне понять суть истинной вовлеченности и глубокого изучения математики. Я наблюдала, как самые разные школьники и студенты вдохновляются математикой, что дало им прекрасную возможность получить представление о математических концепциях и взаимосвязях между ними. Я пришла к выводу, что и 11-летние ученики, сталкивающиеся с серьезными трудностями в изучении математики, и успешные студенты лучших университетов испытывают одинаковое воодушевление, которое включает в себя такие аспекты, как *любознательность, установление связей, вызов, творчество* и, как правило, *сотрудничество*. На мой взгляд, это и есть пять аспектов вовлеченности. Ниже я расскажу о характере вовлеченности и

воодушевления в связи с изучением математики, прежде чем рассматривать свойства задач, обеспечивающих вовлеченность. Их могут давать на своих уроках математики все учителя.

Вместо того чтобы анализировать суть вовлеченности бесстрастно и абстрактно, я хочу показать вам пять примеров истинного воодушевления. Я считаю его вершиной вовлеченности. Речь пойдет о ситуациях, которые я наблюдала в разных группах и благодаря которым сделала важные выводы о сути преподавания и задачах, которые открывают такие возможности для обучения. Первый пример взят не из школы, а из особой среды одного из стартапов Кремниевой долины. Он раскрывает один сильнейший аспект воодушевления, который я хотела бы донести до всех учителей математики.

1. Понимание открытости чисел

В конце декабря 2012 года, за несколько дней до отъезда в Лондон на праздники, я впервые встретилась с Себастьяном Труном и его командой в Udacity — компании, которая занимается организацией онлайн-курсов. Мне предложили приехать к ним, чтобы дать членам команды консультации по поводу математических курсов и способов создания возможностей для эффективного обучения. В тот день я зашла в просторный офис компании в Пало-Альто и сразу поняла, что попала в стартап Кремниевой долины. Велосипеды на стенах; молодые люди, в основном парни, в футболках и джинсах, погрузились в компьютеры или сидят, обсуждая различные идеи. В офисе не было никаких перегородок, только кабинки и много света. Я прошла мимо кабинок в конференц-зал, расположенный в задней части офиса за стеклянной стеной. Около 15 человек втиснулись в небольшое помещение и сидели на стульях и на полу. Себастьян вышел вперед, пожал мне руку, представил меня присутствующим и пригласил сесть. Затем он начал забрасывать меня вопросами: «Каким должен быть хороший курс математики? Как ее преподавать? Почему ученики не справляются с математикой?» Себастьян сказал, что, по мнению его друга Билла Гейтса, алгебра стала причиной многочисленных неудач с изучением математики в США. Я дерзко ответила: «О, так вам сказал об этом преподаватель Билл Гейтс?» Присутствующие улыбнулись, а Себастьян пораженно застыл. Затем он спросил: «Ладно, а что *вы* думаете?» Я сказала, что ученики не справляются с алгеброй не потому, что это трудный предмет, а потому, что у них нет чувства числа, которое является основой

этой дисциплины. Крис, один из разработчиков курсов, в прошлом учитель математики, кивнул в знак согласия.

Себастьян продолжил забрасывать меня вопросами. Когда он спросил, каким должно быть хорошее задание по математике, я прервала беседу и спросила присутствующих, могу ли я задать *им* один математический вопрос. Они охотно согласились, и я разыграла мини-версию разговора о числах. Я попросила присутствующих подумать, как можно найти произведение 18 × 5, и показать мне, что ответ готов, молча подняв палец вверх. Вскоре у всех членов команды были ответы. В тот день для решения примера было использовано шесть разных методов, и я нарисовала их на столе, вокруг которого мы сидели (рис. 5.1).

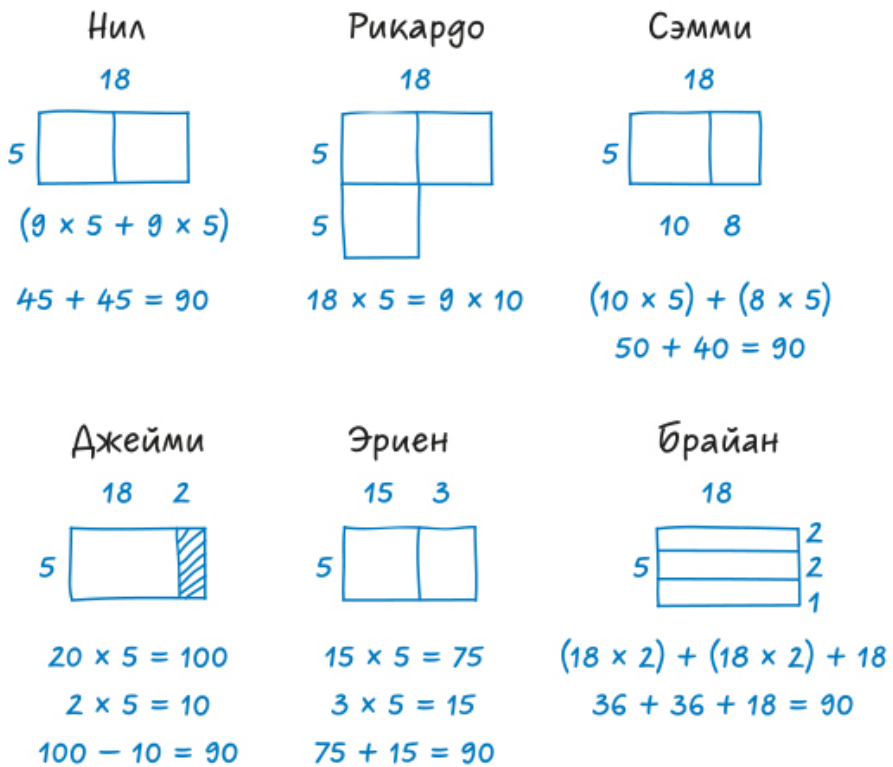


Рис. 5.1. Визуальные решения примера 18 × 5

Затем мы обсудили сходство и различия между этими методами. Когда я изображала их с помощью рисунков, глаза присутствующих становились всё шире. Некоторые начали взволнованно вскакивать с мест. Кто-то сказал, что даже не представлял себе, как много способов анализа абстрактной числовой задачи существует. Другие были поражены тем, что существует визуальное представление такой задачи и оно так

наглядно иллюстрирует математику.

Когда несколько дней спустя я приехала в Лондон, мне пришло электронное письмо от Энди, молодого разработчика курсов из Udacity. Он составил онлайновый мини-курс по примеру 18 × 5, в процессе работы над которым прохожих на улице спрашивали, как они решили бы этот пример, чтобы собрать разные методы. Члены команды были настолько воодушевлены этими идеями, что захотели сразу же выложить их в открытый доступ; в команде говорили даже о том, чтобы изготовить для всех сотрудников Udacity футболки с надписью «18 × 5».

Через несколько месяцев после встречи в Udacity я познакомилась с Люком Бартеле, который был тогда директором Wolfram Alpha — одной из самых важных математических компаний в мире. Люк прочитал о разных методах решения примера 18 × 5, которые я описала в своей книге (Boaler, 2015), и это так заинтересовало его, что он начал спрашивать всех, с кем встречался, как бы они решили этот пример. Я считаю важным рассказать об этой реакции, моментах глубокого воодушевления по поводу абстрактной математической задачи. Почему всем этим пользователям высшей математики, как и маленьким детям, так интересно представлять себе и анализировать разные методы решения на первый взгляд неинтересной задачи, такой как 18 × 5? Возможно, вовлеченность обусловлена тем, что люди отмечают в математике элемент творчества, и тем, что они по-разному *видят* математические идеи. Это интересно само по себе, но верно и то, что большинство моих знакомых, даже математики высокого уровня, никогда не осознавали, что числа могут быть настолько открытыми, а для решения задач с ними можно использовать так много разных способов. Вовлеченность еще больше усиливается, когда это осознание приходит вместе с глубоким визуальным пониманием математических методов работы.

Я использовала аналогичные задачи в работе с учениками средней школы, студентами Стэнфорда и генеральными директорами компаний. Все они демонстрировали одинаковую вовлеченность. Благодаря этому я поняла, что людей восхищают присущие математике гибкость и открытость. Это наука, которая требует точного мышления, но, когда оно сопровождается изобретательностью, гибкостью и многообразием идей, люди начинают воспринимать ее как живую науку. Учителя могут создавать такое воодушевление на уроках при работе над любыми задачами, предлагая ученикам описать разные способы представления и решения задач и поощряя обсуждение разных

способов визуального представления. Они должны уделять внимание выполнению правил работы на уроке и объяснять ученикам, что те должны слушать и уважать мнение друг друга. В главе 7 представлено описание стратегии, которая позволяет добиться этого. Если ученики уважают друг друга и внимательны к одноклассникам, очень интересно наблюдать, с какой вовлеченностью они рассказывают о разных способах решения задачи.

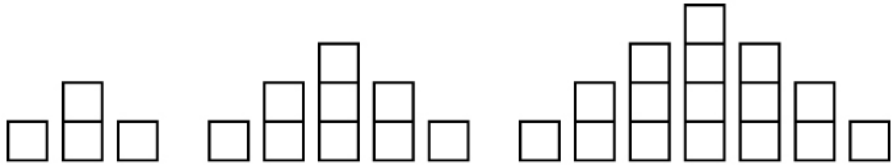
2. Растущие фигуры: сила визуализации

Следующий пример взят из совсем другой среды — занятий летней школы в районе Сан-Франциско, куда отправили учеников с низкой успеваемостью за прошедший учебный год. Вместе со своими студентами из Стэнфорда я преподавала математику в одном из четырех математических классов. Мы решили сосредоточиться на алгебре, но алгебра как таковая, бездумный поиск значения *x*, не была нашей конечной целью. Мы преподавали ее как инструмент, который можно использовать для решения содержательных, увлекательных задач. Наши ученики только что кончили шестой и седьмой классы, и большинство из них ненавидели математику. Примерно половина получила низшие оценки за прошедший учебный год (подробнее см.: Boaler, 2015; Boaler & Sengupta Irving, 2015).

Разрабатывая учебную программу для летней школы, мы использовали ряд ресурсов, в том числе книги Марка Дрисколла, математические задачи Рут Паркер, а также два учебных плана из Англии — SMILE (Secondary mathematics individualized learning experience — «Опыт индивидуального изучения математики в средней школе») и Points of Departure («Отправные пункты»). Задачу, которая вызвала воодушевление в данном случае, составила Рут Паркер. В ее рамках ученики должны были продолжить показанную в примере 5.1 растущую закономерность, представленную в виде кубиков, и определить, сколько кубиков будет на шаге 100. (Полные рабочие листы со всеми заданиями можно найти в приложении к этой книге.)

ПРИМЕР 5.1. ЗАДАЧА С ФИГУРАМИ

Как вы представляете себе рост фигур?



Материал предоставлен Рут Паркер; задача используется на курсах MEC (Mathematics Education Collaborative).

Ученики могли использовать кубики. Мы попросили детей работать группами, обсуждая разные идеи. Иногда группы формировали мы сами, а порой их создавали сами ученики. В день, о котором идет речь, я обратила внимание на интересную группу из троих мальчиков — самых непослушных в классе! До начала учебы в летней школе они не были знакомы друг с другом, но на протяжении большей части первой недели либо сами уклонялись от выполнения заданий, либо делали всё, чтобы отвлечь других от работы. Эти мальчишки постоянно что-то выкрикивали, когда другие писали на доске; в первые дни учебы их больше интересовало общение, чем обсуждение математических задач. На последнем занятии по математике Хорхе получил неудовлетворительную оценку, Карлос — удовлетворительную, а Люк — отличную. Но в день, когда мы дали ученикам это задание, что-то изменилось. Три мальчика трудились 70 минут, не останавливаясь, не отвлекаясь и не пытаясь уклониться от работы. В какой-то момент к ним подошли девочки и начали тыкать в них карандашами. Мальчики взяли свою работу и перешли к другому столу — настолько они были увлечены поиском решения.

Все наши уроки записывались на видео. Просматривая запись того, как эти мальчики работали в тот день, мы увидели, что они активно обсуждают числовые закономерности, визуальный рост и алгебраическое обобщение. Такая глубокая вовлеченность отчасти объяснялась тем, что мы использовали адаптированный вариант задачи. Адаптацию можно выполнять применительно к любым математическим заданиям. На уроках, когда ученикам дают задачи с функциями, обычно требуется определить значение на шаге 100 и в общем виде на шаге n. Мы начали не с этого, а с того, что попросили учеников самостоятельно поразмышлять о том, как они *представляют себе* рост фигуры, прежде чем переходить к групповой работе. Мы предложили им поразмышлять над этим на визуальном уровне, а не с помощью чисел, и нарисовать в своих тетрадях, где они представляют себе дополнительные кубики на каждом шаге. Мальчики по-разному

увидели картину происходящего. Люк и Хорхе представили себе рост фигуры в виде прибавления кубиков к нижней части. Позже этот вариант получил в классе название «метод боулинга»: кубики расставляются, как кегли на дорожке. Карлос представил себе рост фигуры в виде кубиков, которые устанавливаются на верхушки столбцов. Этот подход стал известен как «метод дождевых капель» — кубики падают на столбцы сверху, как капли дождя с неба (рис. 5.2).

Рис. 5.2. Работа учеников
Источник: Selling, 2015.

Поработав над задачей о росте функции индивидуально, ученики обсудили, кто как представляет себе дополнительные кубики на каждом шаге. Поразительно, что они связали свои визуальные методы с количеством кубиков в каждой фигуре; и не только работали со своими методами, но и находили время объяснить их друг другу и применить методы друг друга. Рост функции заинтриговал этих троих мальчиков, и они настойчиво пытались определить значение на шаге 100, вооружившись своими знаниями о визуальном росте фигуры. Мальчики предлагали друг другу идеи, наклонившись над столом и показывая свои рисунки в тетрадях. Как часто бывает в процессе решения математических задач, они перемещались зигзагами, то приближаясь к нужному решению, то отдаляясь от него, а затем снова возвращаясь к нему (Лакатос, 2010). Разные подходы позволяли им тщательно исследовать математический ландшафт.

Я показывала видеозапись работы этих мальчиков на многих конференциях для учителей. На всех произвели впечатление их мотивация, настойчивость и высокий уровень дискуссии. Учителя знают, что настойчивость, которую продемонстрировали эти мальчики, а также уважительность, с которой они обсуждали

идеи друг друга, особенно в летней школе, — явление весьма необычное, и им интересно, как мы этого добились. Им знакома ситуация, когда ученики (особенно отстающие) прекращают попытки, если задача трудная и им не удается получить ответ сразу. Но в нашем случае этого не произошло; когда мальчики не смогли двигаться дальше, они вернулись к своим диаграммам и обсудили друг с другом идеи, многие из которых были ошибочными, но в итоге все же смогли найти путь к решению. Показав видеозапись этого случая учителям во время конференции, я спрашиваю их, какие элементы взаимодействия учеников могут помочь нам понять причины высокого уровня их настойчивости и вовлеченности. Ниже представлен ряд важных соображений по поводу благоприятных возможностей для повышения вовлеченности всех учеников.

1. **Задача трудная, но доступная.** Все три мальчика смогли понять задачу, хотя им было нелегко. Она идеально соответствовала их уровню мышления. Найти задачи, которые идеально подойдут всем ученикам, трудно, но возможно, когда мы расширяем их: приводим к виду, который я называю «низкий пол, высокий потолок». Пол низкий, потому что все могут видеть, как растет фигура, а потолок высокий, поскольку функция, которую изучали мальчики, — квадратичная, с помощью которой шаг n может быть представлен в виде $(n + 1)^2$ блоков. Мы сделали «пол» ниже, предложив ученикам поразмышлять на визуальном уровне, хотя, как я покажу ниже, это не единственная причина для такой важной адаптации.

2. **Мальчики восприняли задачу как головоломку**, поэтому им было интересно искать решение. Вопрос не касался «реального мира» или жизни мальчиков, но увлек их. В этом и состоит сила абстрактной математики: она подразумевает открытое мышление и установление связей.

3. **Рассуждения на визуальном уровне помогли мальчикам понять, как растет закономерность в задаче.** Мальчики увидели, что представленная фигура растет как квадрат со стороной $(n + 1)$, рассмотрев рост закономерности визуально. Они искали сложное решение, но были уверены в себе: им помогало визуальное представление происходящего.

4. Мальчиков воодушевило, что **каждый из них разработал свой способ визуального представления роста закономерности** и все они нашли правильные методы, раскрывающие разные аспекты решения. Мальчики с воодушевлением поделились своими мыслями друг с другом и использовали свои идеи и идеи других при решении задачи.

5. **Урок был организован так, чтобы ученики стремились**

предлагать идеи без страха совершить ошибку. Это позволило мальчикам двигаться дальше, когда они «застревали», предлагая идеи (и правильные, и ошибочные), которые позволят продолжить обсуждение.

6. Мы научили учеников **уважать мнение друг друга**. Мы призывали отдавать должное широте мышления каждого ученика, а не процедурному мышлению отдельных детей, а также давали высокую оценку разным способам визуального представления задач и установления связей.

7. Ученики **использовали свои идеи**, а не придерживались метода, взятого из учебника по алгебре. Они предложили разные идеи по поводу визуального представления роста функции, поэтому им было еще интереснее решать задачу.

8. **Мальчики работали вместе.** На видео заметно, как мальчики поняли друг друга, делясь идеями в процессе обсуждения, и получили еще большее удовольствие от работы.

9. **Работа мальчиков носила смешанный характер.** Люди, которые смотрят это видео, отмечают, что каждый ученик предлагает что-то особенное и по-своему важное. Сильный постоянно выкрикивает догадки по поводу чисел (эта стратегия могла бы быть полезной для сугубо процедурных вопросов), а слабые подталкивают его к тому, чтобы он размышлял на визуальном и более концептуальном уровне. Именно такое сочетание разных способов мышления помогает мальчикам и приводит их к успеху.

Как правило, в задачах на рост закономерности ученикам задают числовые вопросы вроде «Сколько кубиков на шаге 100?» и «Сколько кубиков на шаге n?» Мы тоже поставили ученикам такие вопросы, но только после того, как они поработали над задачей сами, чтобы они проанализировали рост фигуры на визуальном уровне. Это изменило все.

Как показано на рис. 5.3–5.10, люди представляют себе рост фигуры разными способами. Не предлагая ученикам мыслить визуально, мы упускаем прекрасную возможность помочь им лучше понять происходящее. Ниже показано, как учителя и ученики, с которыми я работала, представляют себе рост фигуры, и приведены названия, которые они использовали для обозначения своих вариантов.

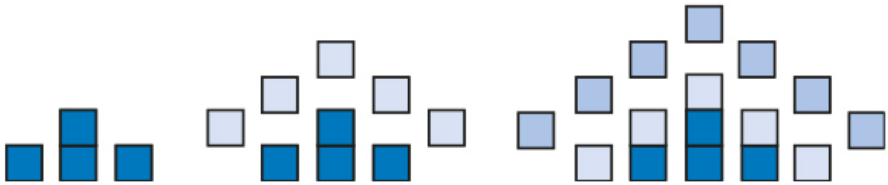


Рис. 5.3. Метод дождевых капель — кубики падают на столбцы с неба, как капли дождя

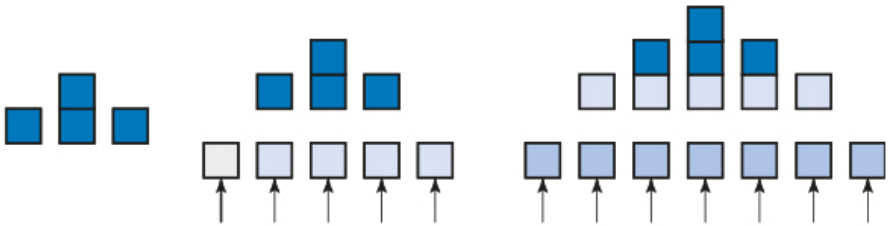


Рис. 5.4. Метод боулинга — кубики расставляются, как кегли на дорожке для боулинга

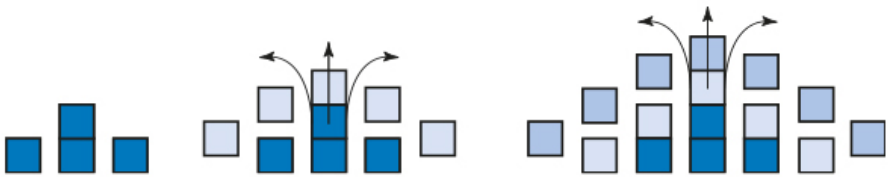


Рис. 5.5. Метод вулкана — средний столбец растет в высоту, а остальные растекаются, как лава из вулкана

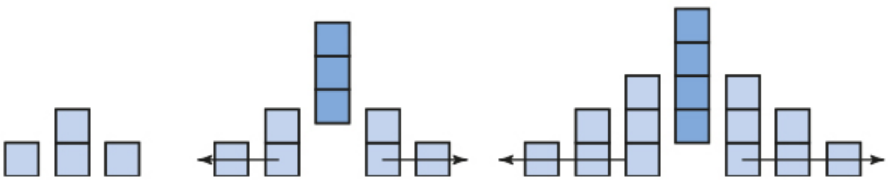


Рис. 5.6. Метод расхождения вод Красного моря — два столбца расходятся, и между ними появляется еще один

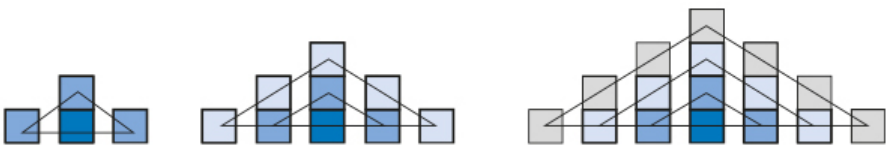


Рис. 5.7. Метод подобных треугольников — уровни можно рассматривать в виде треугольников

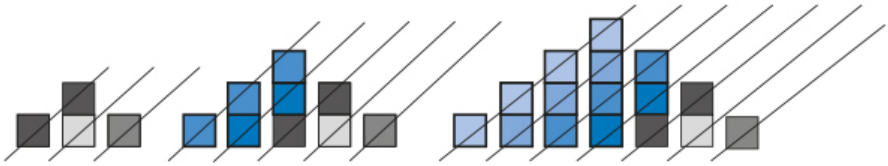


Рис. 5.8. Метод сечения — уровни можно рассматривать по диагонали

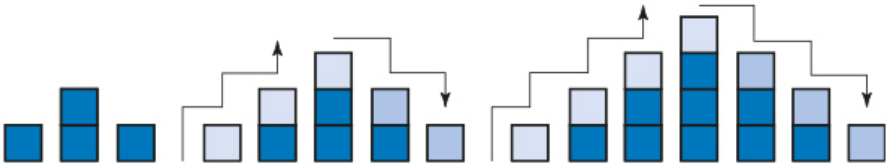


Рис. 5.9. «Лестница в небеса: в доступе отказано» — из фильма «Мир Уэйна»

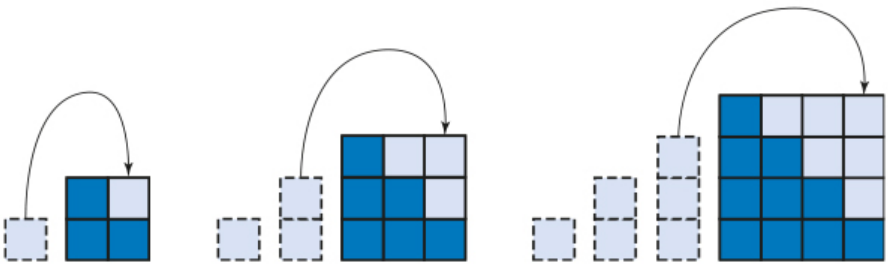


Рис. 5.10. Метод квадратов — любую фигуру можно перегруппировать, сделав из нее квадрат

Недавно я дала эту задачу на рост закономерности группе учителей старших классов, которые не стали тратить время на визуальное представление роста фигуры, составив вместо этого таблицу значений.

Шаг	Количество кубиков
1	4
2	9
3	16
n	$(n + 1)^2$

Когда я попросила учителей объяснить, почему эта функция возрастает по квадратичному закону, они не смогли ответить. Но мы видим здесь квадратичную функцию вот почему: фигура растет как квадрат со стороной $(n + 1)$, где n — номер шага (рис. 5.11).

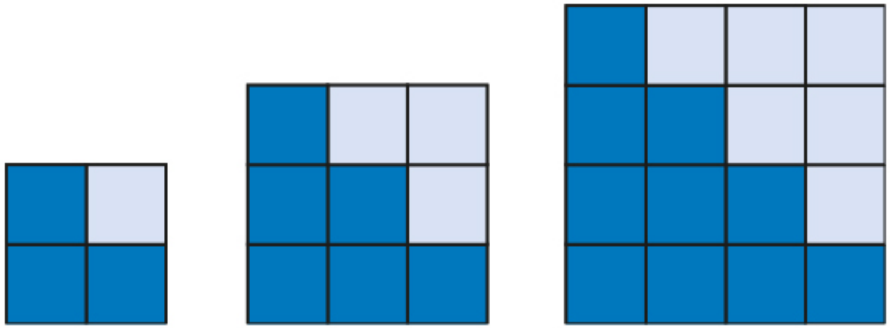


Рис. 5.11. Метод квадратов 2

Если мы не предлагаем ученикам проанализировать рост фигуры визуально, они не могут понять важные аспекты роста функции. Часто они не способны сказать, что означает n, и алгебра остается для них тайной: набором абстрактных символов, которые они переставляют на странице с места на место. Наши ученики летней школы знали, что представляет собой n, поскольку сами его нарисовали. Они знали, почему функция растет по квадратичному закону и почему n-й шаг представлен в виде $(n + 1)^2$. Алгебраическое выражение, которое ученики в итоге составили, имело для них смысл. Кроме того, они не считали, что ищут стандартный ответ; они полагали, что исследуют разные методы и используют свои идеи, в том числе способы визуального представления математического роста. Ниже пойдет речь о том, как свойства данной задачи можно использовать в других задачах, чтобы повысить вовлеченность и понимание учеников.

3. Пора рассказать?

Когда я рассказываю учителям об открытых, исследовательских задачах по математике, например задаче о росте фигур или «дождевых каплях», о которых шла речь выше, они часто спрашивают: «Я понимаю, что эти задачи увлекательны и рождают интересные математические дискуссии, но как ученикам осваивать новые концепции, например тригонометрические функции? Или как разлагать числа на множители? Они не могут открыть это для себя самостоятельно». Это обоснованный вопрос, и поиску ответа на него посвящен ряд важных исследований. Идеальные математические дискуссии — те, в ходе которых ученики используют математические методы и концепции для решения задач. Но иногда учителям нужно познакомить учеников с новыми методами. На большинстве

уроков математики применяется стандартный подход: учителя объясняют методы, а ученики отрабатывают их, решая задачи из учебника. На уроках математики более высокого уровня ученики выходят за рамки отработки конкретных приемов и используют их для решения прикладных задач, но порядок сохраняется: учителя объясняют методы, а ученики применяют их.

В ходе одного важного исследования были сопоставлены три подхода к преподаванию математики (Schwartz & Bransford, 1998). Первый распространен в США: учитель объяснял методы, а ученики с их помощью решали задачи. При втором подходе ученики имели возможность открыть эти методы для себя в рамках исследований. Третий представлял собой обратный вариант типичной последовательности: ученикам сначала ставили прикладные задачи, над которыми они должны были работать, не зная, как их решить, а затем объясняли необходимые для этого методы. Именно третья группа учеников показала гораздо более высокие результаты. Исследователи обнаружили: когда ученикам предлагали решить задачи и они не знали методов, но им давалась возможность провести исследования, у них возникало любопытство и их мозг был настроен на изучение нового. И когда учителя объясняли эти методы, ученики уделяли им больше внимания и были более заинтересованы. Результаты исследования были опубликованы в статье под названием «Пора рассказать». По мнению исследователей, вопрос не в том, должны ли мы *рассказывать* о методах или объяснять их, а в том, когда это лучше делать. Результаты исследования однозначно указывают: самый подходящий момент наступает после того, как ученики исследуют задачу.

Как это происходит на уроке? Как учителям удается ставить ученикам задачи, которые они не могут решить, так чтобы те не испытывали разочарования? Чтобы объяснить, как это работает, приведу два разных примера такого подхода к преподаванию.

Первый взят из научного исследования, которое я проводила в Англии. Оно показало, что ученики, изучавшие математику на основе проектно-ориентированного подхода, добились гораздо более высоких результатов как при сдаче стандартных тестов (Boaler, 1998), так и позже (Boaler, 2005), по сравнению с теми, кто применял традиционный подход. В рамках одной из задач, о которой я узнала в школе, работающей на основе проектно-ориентированного подхода, группе тринадцатилетних учеников сказали, что фермеру нужно оградить забором как можно большую площадь 36 планками длиной 1 м. Ученики начали исследовать способы определения максимальной площади. Они пробовали квадраты, прямоугольники и треугольники, пытаясь

найти фигуру с максимально возможной площадью. Два ученика поняли, что самую большую площадь имеет фигура, состоящая из 36 сторон, и приступили к определению ее точной площади (рис. 5.12).

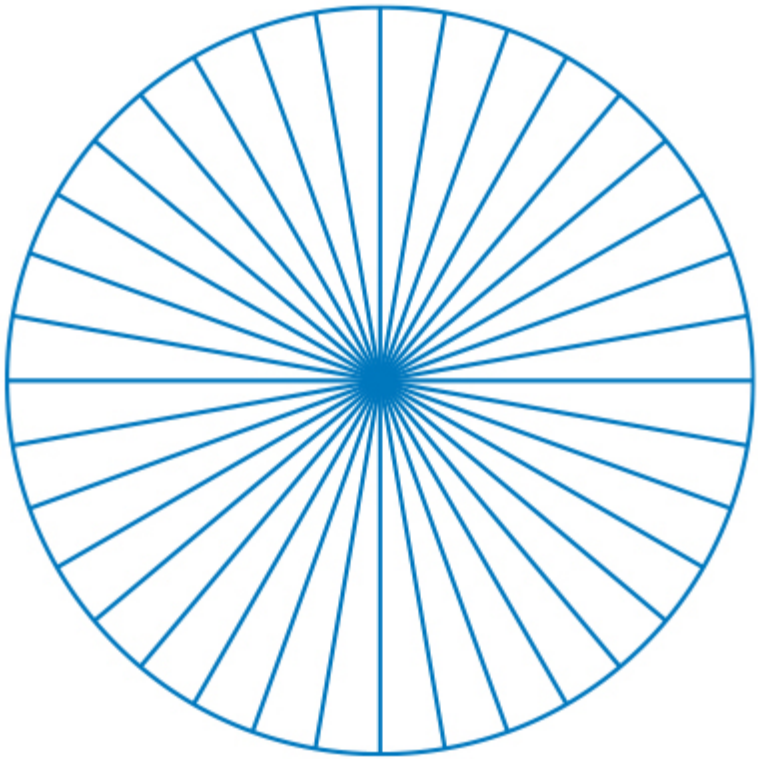


Рис. 5.12. Максимальную площадь ограждает забор в виде правильного многоугольника с 36 сторонами

Ученики разделили свою фигуру на 36 треугольников; им было известно, что длина основания треугольника составляет 1 м, а угол при вершине — 10˚ (рис. 5.13).

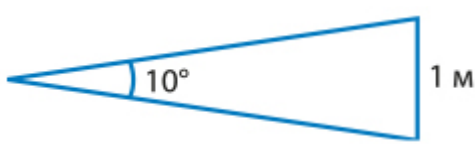


Рис. 5.13. Треугольник, образованный секцией забора длиной 1 м

Но этого было недостаточно, чтобы найти площадь треугольника. И тут учитель объяснил детям суть тригонометрии и способы использования функции тангенса для определения

высоты треугольника. Ученики были в восторге: так кстати пришелся новый метод. Я видела, как один мальчик взахлеб объяснял членам своей группы функцию тангенса, оценивая новое знание как «действительно крутое». В этот момент я вспомнила об уроке совсем иного рода, за которым я наблюдала в обычной школе неделей ранее. Учитель объяснил ученикам тригонометрические функции и дал им целые страницы с упражнениями.

Ученики считали, что тригонометрические функции очень скучны и не имеют отношения к их жизни. В школе, придерживающейся проектно-ориентированного подхода, ученики с воодушевлением исследовали тригонометрию и считали эти методы интересными и полезными. В результате они глубже освоили методы. И именно поэтому ученики школы с таким подходом к преподаванию математики более успешны на экзаменах и в жизни.

Второй пример того, как ученики изучали методы после постановки задач, взят из исследования, которое я проводила в США. Оно также показало, что ученики добились гораздо лучших результатов, когда им преподавали математику на основе концептуального подхода, сфокусированного на связях и коммуникации (Boaler & Staples, 2005). Более подробная информация об обоих подходах к преподаванию представлена в моей книге «При чем тут математика?» (Boaler, 2015). Однажды я присутствовала на уроке по началам анализа в успешной школе, которую я назвала Рейлсайд. Урок был посвящен определению объема сложной фигуры. Лора Эванс готовила учеников к изучению анализа и поиску площади под кривой с помощью интегралов, но не стала с самого начала объяснять формальный метод, как обычно бывает. Она поставила задачу, для которой были нужны эти знания, и предложила детям подумать, как ее решить. Задача состояла в том, чтобы найти способ определения объема лимона. Чтобы ученики могли поразмышлять над этим, учительница дала каждой группе лимон и большой нож и предложила исследовать возможные решения (рис. 5.14).

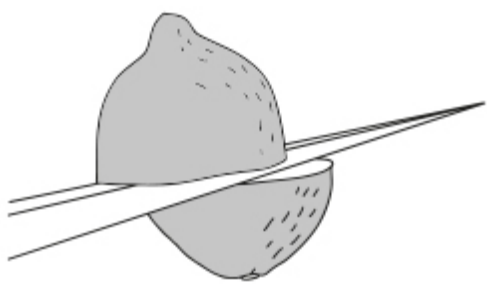


Рис. 5.14. Чему равен объем лимона?
Источник: Shutterstock (ampFotoStudio).

После того как ученики обсудили эту задачу в группах, некоторые из них подошли к доске и с воодушевлением поделились своими идеями. Одна группа решила погрузить лимон в миску с водой, чтобы вычислить объем вытесненной жидкости. Вторая — тщательно измерить размер лимона. Третья — разрезать лимон на тонкие дольки и представить их себе в виде двумерных сечений, которые они затем разрезали на полоски, приблизившись к формальному методу определения площади под кривой, которому обучают в рамках курса математического анализа (рис. 5.15).

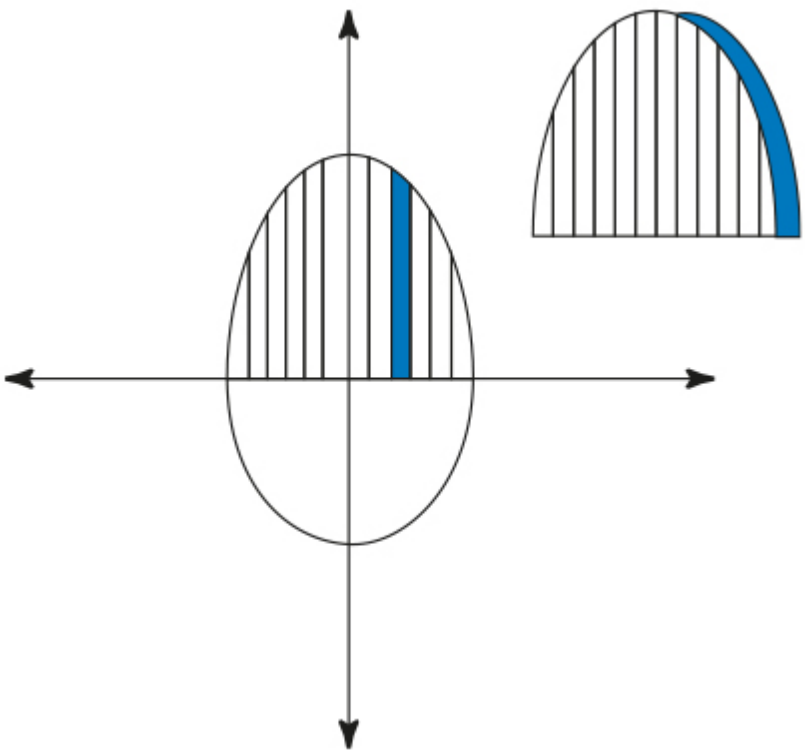


Рис. 5.15. Вычисление объема лимона по сечениям

Когда учительница объяснила детям метод интегралов, те с воодушевлением приняли его как эффективный инструмент.

В обоих случаях применялся обратный порядок обучения. Ученики узнали о тригонометрических методах и пределах *после* того, как исследовали задачу и столкнулись с необходимостью в конкретных приемах. Учителя объяснили эти методы в тот момент, когда в них возникла необходимость, вместо того чтобы

сначала дать формальную информацию, а потом предложить отработать метод. Это пробудило у учеников огромный интерес к изучаемым методам и помогло понять их.

Как я упоминала в главе 4, Себастьян Трун поведал мне, насколько важную роль сыграла интуиция в его работе. Он сказал, что ему не удавалось продвинуться в решении задачи, если у него не было интуитивного ощущения, что он на верном пути. Математики также подчеркивают роль интуиции в их работе. Леоне Бертон провела опрос среди 70 математиков, занимающихся научными исследованиями, и 58 из них отметили этот факт (Burton, 1999). Рубен Херш пришел к тому же выводу: «Интуиция в математике повсюду» (Hersh, 1999). Так почему же ее не применяют на большинстве уроков математики? Многие дети даже не представляют себе, что интуиция нужна при решении задач. Когда ученикам предложили поразмышлять над определением объема лимона, их попросили прибегнуть к интуиции. С ее помощью можно решать многие математические задачи. Детям помладше стоит дать разные треугольники и прямоугольники и предложить подумать, как найти площадь треугольника, *до того как* объяснить им формулу площади. Ученики могут анализировать различия между наборами данных до того, как им объяснят такие понятия, как среднее арифметическое, мода и амплитуда. Они могут исследовать соотношения в окружностях, прежде чем узнают значение π. И когда эти ученики начнут изучать формальные методы, этот процесс будет более глубоким и содержательным. Мыслить интуитивно — очень полезное занятие. Во-первых, дети перестают пользоваться конкретными методами и анализируют задачи в более широком контексте. Во-вторых, они осознают, что должны использовать разум: мышление, осмысление и умозаключения. Они уже не думают, что их задача — простое воспроизведение методов, и понимают, что им нужно анализировать целесообразность применения разных подходов. В-третьих, как показали исследования Шварца и Брэнсфорда, мозг учеников настраивается на изучение новых методов (Schwartz & Bransford, 1998).

4. Первое знакомство с математическими связями (треугольник Паскаля)

Следующий пример взят из семинара по профессиональному развитию, за которым я наблюдала. Мероприятие вела Рут Паркер — удивительный педагог, которая организует для учителей

семинары, помогающие им понять математику на совершенно новом уровне. Я выбрала именно этот пример, поскольку в тот день увидела то, с чем сталкивалась впоследствии неоднократно: задачу, которая позволила учительнице по имени Элизабет увидеть настолько сильную математическую связь, что она расплакалась. Элизабет — учительница начальной школы, которая, как и многие другие, преподавала математику как набор процедур. Она не знала, что это наука, в которой есть много глубоких связей. Люди, которые всегда считали математику бессвязным набором процедур, нередко волнуются, когда видят глубокие связи в математике.

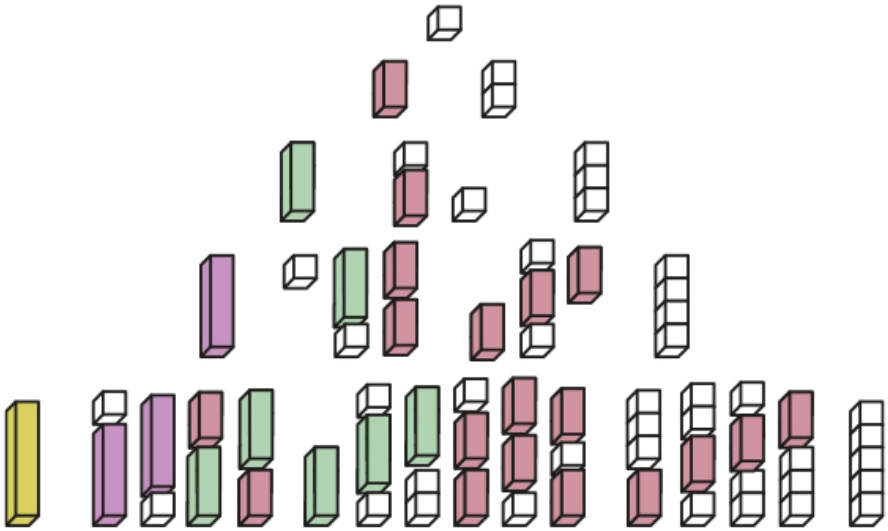
Семинар Рут, как и обучение в нашей летней школе, был сосредоточен на алгебраическом мышлении. Ведущая давала учителям много задач на определение функциональных закономерностей. В тот день Рут выбрала интересную задачу из категории «низкий пол, высокий потолок»: с виду простую, но на деле сложную и глубокую. Учителя, которые принимали участие в семинаре, после этого начали изучать экспоненциальный рост и отрицательные показатели степени.

Элизабет и другие учителя приступили к работе, раскладывая и упорядочивая цветные счетные палочки Кюизенера, чтобы найти все способы формирования последовательностей, соответствующих длине трех выбранных ими палочек. Некоторые решили начать с палочки длиной 10 — и задача заметно усложнилась, поскольку существует 1024 способа образовать последовательности такой же длины, что и палочка длиной 10! Рут знала, что ее задача не в том, чтобы избавлять учителей от проблем, а в том, чтобы дать им возможность погрузиться в математические детали задачи. Поднапрягшись, некоторые из этих учителей вспомнили то, что узнали на семинаре немного раньше: важный математический навык, которым ученики могут так и не овладеть за одиннадцать лет, — начинать с меньшего. Учителя поработали со счетными палочками разной длины и увидели, как формируется закономерность и на визуальном, и на числовом уровне (пример 5.2).

ПРИМЕР 5.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПАЛОЧЕК КЮИЗЕНЕРА

Определите, сколько разных последовательностей можно составить для палочек любой длины. Например, для светло-зеленой палочки можно составить четыре

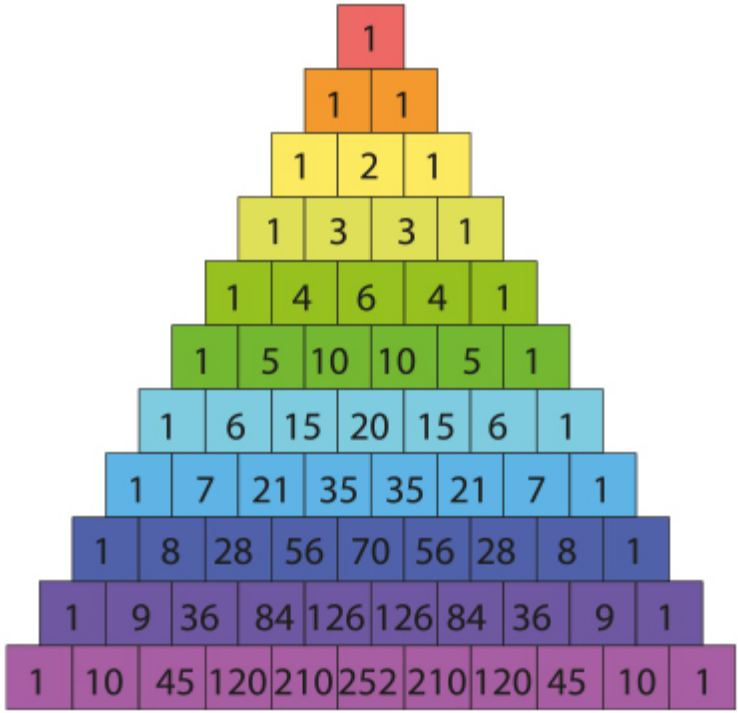
последовательности.



Материал предоставлен Рут Паркер; задача используется на курсах MEC (Mathematics Education Collaborative).

И тут Рут показала учителям треугольник Паскаля и предложила им исследовать его связь с задачей с палочками Кюизенера и знаменитым треугольником (см. пример 5.3).

ПРИМЕР 5.3. ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ



Потратив много сил на выполнение этого задания, учителя с удивлением обнаружили, что все их варианты находятся в треугольнике Паскаля. Именно этот момент растрогал Элизабет до слез, и я ее понимаю. Для любого человека, который воспринимал математику как совокупность несвязных процедур, а затем получил возможность исследовать визуальные и числовые закономерности, научившись видеть и понимать связи, это сильнейший опыт. Тогда Элизабет и обрела уверенность в своих интеллектуальных возможностях и способности самостоятельно обнаруживать математические идеи и связи.

С этого момента отношения Элизабет с математикой изменились, и она уже никогда не возвращалась к прошлому. Я встретилась с ней год спустя, когда она снова проходила курс Рут Паркер, чтобы освоить еще более эффективный подход к изучению математики. Элизабет рассказала мне обо всех замечательных изменениях, которые она внесла в свои методы преподавания, и о трепетном отношении ее подопечных к математике.

Опыт нового *в*идения математики, который получила Элизабет, когда впервые узнала о математических связях, я постоянно использую в работе с разными детьми и взрослыми. И эмоции, которые они испытывают, прямо связаны с опытом обнаружения, изучения и осмысления математических связей.

Этот пример связан с задачей, которую я использовала в работе со своей группой по подготовке учителей в Стэнфорде и с другими группами учителей. Она вызывает такое сильное воодушевление, что не рассказать о ней нельзя. Это одна из задач на рост закономерности, но с одним дополнением, которому я и хочу уделить особое внимание. Задачу придумал Карлос Кабана — замечательный учитель, с которым я работаю. В примере 5.4 показана задача, которую он обычно ставит ученикам.

ПРИМЕР 5.4. ЗАДАЧА НА ОТРИЦАТЕЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО

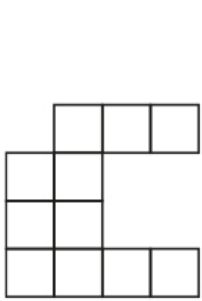


Рисунок 2

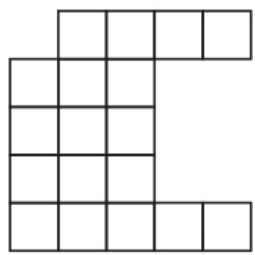


Рисунок 3

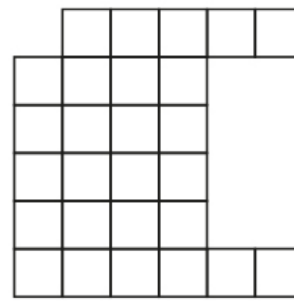


Рисунок 4

1. Как выглядел бы рисунок 100?
2. Представьте себе, что вы могли бы продолжить построение этой модели в обратном направлении. Сколько ячеек было бы на рисунке –1? (Да, рисунок минус один, что бы это ни значило!)
3. Как выглядел бы рисунок –1?

На основе материалов Карлоса Кабаны.

Один из вопросов, поставленных в этой задаче, звучит так: сколько ячеек было бы на рисунке –1 (если бы нужно было продолжить закономерность в обратном направлении, сколько ячеек было бы на шаге –1)? Задавая этот вопрос учителям, я обнаружила, что им легко найти ответ. Гораздо более интересным и сложным был вопрос о том, как выглядел бы рисунок на шаге –1. Когда я включила этот вопрос в задачу, произошло кое-что поразительное. Решение (которое я не буду здесь раскрывать)

требует напряженных размышлений; учителя шутили, что, когда они пытались найти это решение, у них заболела голова и произошло возбуждение синапсов. Существует ряд способов добраться до шага –1 и правильных вариантов визуального представления. Но и числовое решение не единственное. Задача перемещается в неизведанную и захватывающую область — анализ вопроса о том, что такое отрицательный квадратный корень. Некоторые учителя поняли, что им необходимо поразмышлять об *отрицательном пространстве*, а также о том, как выглядела бы ячейка, отображенная на себя. Когда я поставила эту задачу свой группе учителей из Стэнфорда, они от волнения перепрыгивали через столы и пытались представить отрицательное пространство, протыкая в бумаге отверстия, чтобы показать, как ячейки переходят туда. Один из учителей понял и рассказал другим о том, что эту функцию можно представить в виде параболы (рис. 5.16). Другой спросил меня, куда уйдет эта парабола — останется ли на положительной части оси ординат или примет отрицательное значение.

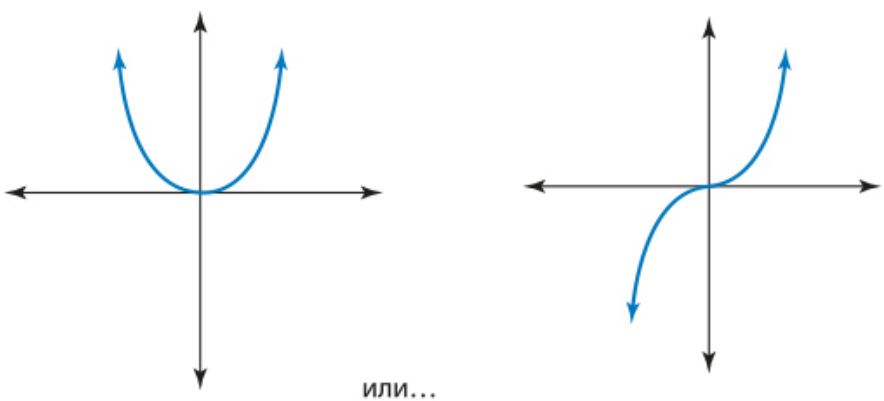


Рис. 5.16. Дилемма с параболой

Этот вопрос показался членам группы очень увлекательным, и они активно старались во всем разобраться. В конце занятия будущие учителя пришли к выводу, что испытали истинное воодушевление и знают, какие ощущения хотят вызывать у своих учеников на уроках.

Но что именно вызвало такое воодушевление? Когда недавно я поставила эту задачу ведущим учителям в Канаде, она так увлекла их, что я не могла заставить их остановиться. Кое-кто даже шутил по этому поводу. В Twitter появилось сообщение: «Джо Боулер не может оторвать нас от задачи, которую нам поставила».

Эта задача вызывает такое воодушевление, поскольку требует

размышлений об отрицательном пространстве, выходе в другое измерение, что само по себе интересно. Математика позволяет сделать это, потому-то она так увлекательна. Кроме того, слушатели курса считали, что исследуют неизведанную область; они не искали ответ на вопрос, который знали преподаватель и составители учебников, и это усиливало их воодушевление. Когда слушатели курса задавали вопрос о направлении параболы, у них было ощущение, что они могут спросить обо всем, что математика — открытая наука и, обнаружив новую идею (ту же параболу), они могут развить ее с помощью следующего вопроса. Визуальное представление математической закономерности снова сыграло важнейшую роль в усилении вовлеченности.

Прежде чем задуматься, что значат все эти примеры в контексте разработки увлекательных задач, приведу еще один пример. На сей раз события разворачивались на уроке в третьем классе.

6. От фактов к воодушевлению

В главе 4 я говорила, что учителям стоит изменить способы стимулирования учеников к изучению математических фактов, а также о важности перехода от работы, которая часто травмирует учеников (тесты с ограничением времени, изучение конкретных фактов и долгие часы заучивания), к увлекательным занятиям, которые укрепляют важные связи в головном мозге. Чтобы помочь учителям внедрить такие перемены, мы с коллегами из YouCubed написали статью, упомянутую в предыдущей главе. Я разместила ее на нашем сайте в надежде на то, что ее смогут прочесть многие учителя. Но мы не могли предвидеть масштабов влияния этой статьи: ее цитировали крупные газеты США. Один из видов деятельности, о котором мы рассказывали учителям, дал положительный эффект иного рода. Они обменивались информацией о нем друг с другом в соцсетях, публикуя фотографии учеников, которые с удовольствием занимаются математикой и формируют важные связи в головном мозге.

Такую важность и популярность приобрела игра под названием «Насколько близко к 100?» (ее описание см. в предыдущей главе).

В числе прочих мой онлайн-курс прошла и после этого изменила свои методы преподавания математики Роуз Фернандес — учительница третьего класса калифорнийской школы, в которой минимум 40% учеников — из небогатых семей. Роуз повесила на стене плакат с перечнем семи хороших правил

изучения математики, разработанных в YouCubed (см. главу 9), чтобы их видели все ученики. Она рассказала мне, с каким воодушевлением ее ученики играют в эту игру и какие важные математические возможности перед ними открылись. Роуз — вдумчивая учительница; она не только организовала игру для учеников, но и предложила им для начала ее обсудить. Кроме того, она подготовила дополнительные задания для тех, кто работает быстрее. Перед началом игры она предложила детям подумать, как использовать игральные кости в качестве математического инструмента. Роуз попросила их подбрасывать две кости и по очереди называть полученные числа и их произведения. Затем она задала важный вопрос: как умножение и площадь связаны друг с другом? Ученики тщательно проанализировали его. Потом Роуз предложила детям поработать в парах и подумать, чему они учатся в этой игре. Кроме того, она поставила задачу выполнить разложение чисел и найти разные способы их записи на обратной стороне своих листов, если они закончат задание раньше. Ученики играли с большим воодушевлением, а когда Роуз попросила их оценить свою удовлетворенность по шкале от одного до пяти, 95% детей поставили самую высокую оценку.

Вот что говорили ученики, размышляя над этой игрой.

«Это заставило меня думать».

«Было весело исследовать математику и изучать ее».

«Это дало мне возможность попрактиковаться в умножении».

«Это был забавный способ изучить математические факты».

«Я узнал, что умножение и площадь взаимосвязаны».

«Теперь я знаю связь между делением, умножением и площадью, потому что я могу себе ее представить!»

Уровень воодушевления учеников во время этой игры был таким же высоким, как и сила математики, которую они изучали. Они говорили не только об удовольствии от игры, но и о математических концепциях, которые они изучали. Дети размышляли об умножении, делении и площади на визуальном уровне, исследуя математические факты с удовольствием и вовлеченностью. Это куда интереснее заучивания таблицы умножения!

Во всех этих примерах в центре оказалась математическая задача, подкрепленная грамотным подходом к преподаванию.

Ниже представлен обзор важных элементов постановки этих шести задач, которые можно применить ко всем математическим задачам независимо от этапа обучения. Вдобавок во всех случаях ученики взаимодействовали друг с другом, иногда размышляя самостоятельно, но чаще вместе работая над идеями на уроках и получая позитивные сигналы по поводу мышления роста. Ниже представлено описание способов включения этих важных структурных элементов в любую математическую задачу.

От примеров к разработке задач

Непродуктивный период в сфере образования завершается. С тех пор как правительство Буша приняло закон «Ни одного отстающего ребенка» (No Child Left Behind Act), учителя были вынуждены придерживаться «предписанной» программы и пошаговых инструкций, хотя знали, что вредят ученикам. Многие считали, что это снижает их профессиональный уровень: ведь их лишили возможности принимать важные решения по поводу преподавания. К счастью, приходит новое время: учителям доверяют принимать важные профессиональные решения. Один из аспектов преподавания, ориентированного на развитие математического мышления, который интересует меня больше всего, — перемены, которые мы можем внести в уроки математики, давая ученикам важную информацию и делая математические задачи открытыми. Это обеспечивает пространство для обучения и играет важнейшую роль в формировании математического мышления.

Учителя могут найти немало интересных задач на сайтах, которые перечислены в конце этой главы. Но у многих на это нет времени. К счастью, учителям не нужно искать новые учебные материалы: они могут изменить задачи, которые уже используются, расширив их с целью создания новых, более благоприятных возможностей для учеников. Для этого может понадобиться развить свое мышление и учиться разрабатывать задачи: предлагать новые идеи и создавать новый, улучшенный опыт обучения. Воодушевление, о котором шла речь выше, порой было связано с адаптацией знакомых задач. Например, в задаче с растущими фигурами ситуация полностью изменилась после того, как ученики получили простое указание визуализировать рост фигуры, что позволило им увидеть задачу по-новому. Когда учителя сами создают и адаптируют задачи, они становятся максимально эффективными. Это под силу каждому, здесь не нужна специальная подготовка. Легко знать свойства

математических задач и работать с ними, стремясь к их совершенствованию.

В рамках разработки и адаптации задач, ориентированных на успешное изучение математики, существует шесть вопросов, которые повышают эффективность работы, если ставить их и действовать в соответствии с ними. Некоторые задачи лучше подходят для конкретных вопросов; многие задачи и вопросы сочетаются естественным образом. Но я уверенно могу сказать: уделив внимание хотя бы одному из следующих шести вопросов, можно сделать задачу более содержательной.

1. Можете ли вы раскрыть задачу так, чтобы она стимулировала применение разных методов, путей и способов представления?

Учителя способны раскрыть задачи так, чтобы стимулировать учеников к размышлениям над разными методами, путями и способами представления. Раскрывая задачу, мы усиливаем ее учебный потенциал. Это можно сделать разными способами. Включить требование о визуальном представлении (как в задачах с растущими фигурами и с отрицательным пространством) — отличная стратегия. Еще один очень эффективный способ состоит в том, чтобы предложить ученикам придать своим решениям смысл.

Кэти Хамфриз — замечательная учительница. В книге, которую мы с ней написали вместе, представлено описание шести видео с записью того, как Кэти проводит уроки в своем седьмом классе, а также планы этих уроков. На одном из них показано, как Кэти предлагает ученикам решить такую задачу: 1 разделить на $^2/_3$. Это мог бы быть закрытый вопрос, ориентированный на фиксированное мышление, с одним ответом и одним методом. Но Кэти изменила задачу, включив в нее два задания: придать своему решению смысл и представить визуальное доказательство. Кэти начинает урок так: «Вероятно, вы знаете правило, с помощью которого можно решить задачу, но сегодня оно не имеет значения; я хочу, чтобы вы объяснили, почему ваше решение *имеет смысл*».

На видеозаписи урока видно, что некоторые ученики предложили ответ 6. Ведь множеством цифр (таких, как 1, 2 и 3) можно манипулировать без математического осмысления и получить 6. Однако детям не удалось представить решение в виде рисунка и объяснить его смысл. Другие смогли показать, почему единица содержит полтора числа $^2/_3$, с помощью разных вариантов визуального представления. Требование представить свои размышления в виде рисунка и наполнить ответ смыслом

изменило характер задачи. Теперь она ориентирована не на фиксированное мышление, а на мышление роста. И мы провели замечательный урок, на котором царила атмосфера осмысления и понимания.

2. Можете ли вы превратить задачу в исследование?

Когда ученики считают, что во время урока они должны не воспроизводить методы, а выдвигать идеи, это все меняет (Duckworth, 1991). Один и тот же материал можно объяснять, ставя вопросы о процедурах или вопросы, которые побуждают размышлять над идеями и применять процедуры. Например, вместо того чтобы предлагать ученикам вычислить площадь прямоугольника 12×4, спросите их, сколько прямоугольников площадью 24 они могут найти. Это меняет мотивацию и уровень понимания. В варианте, ориентированном на исследования, ученики используют формулу площади прямоугольника, и вдобавок им нужно поразмышлять о размерностях и пространственных отношениях, а также о том, что произойдет при изменении одной размерности (рис. 5.17). Такое изучение математики более комплексно и увлекательно, поскольку ученики используют свои идеи.

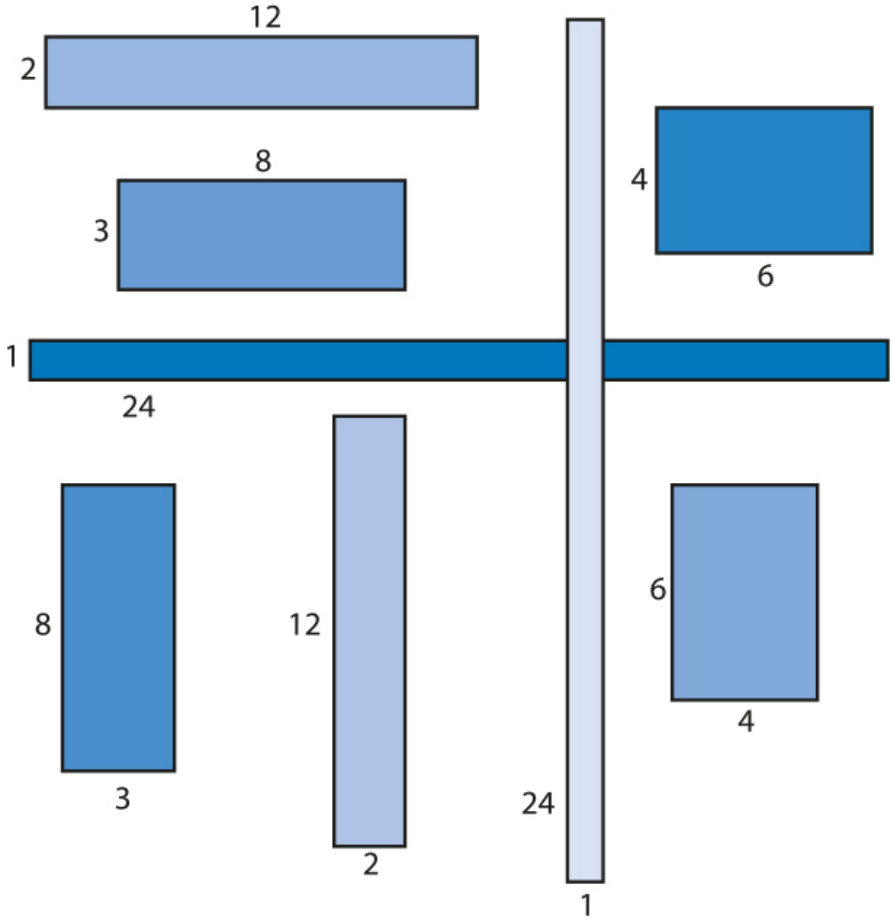


Рис. 5.17. Прямоугольники с площадью 24

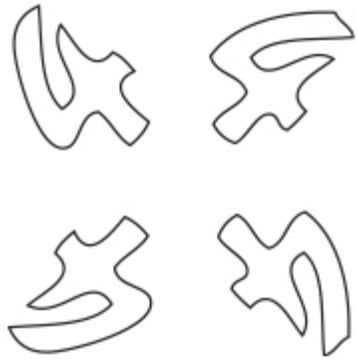
Вместо того чтобы предлагать ученикам назвать четырехугольники с разными свойствами, попросите их придумать свои четырехугольники, как показано в примере 5.5.

ПРИМЕР 5.5. НАЙДИТЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четыре четверки — еще одна замечательная задача (пример 5.6). Вы предлагаете ученикам образовать все числа от 1 до 20 из четырех четверок и любой математической операции, например: $\sqrt{4} + \sqrt{4} + 4/4 = 5$.

ПРИМЕР 5.6. ЧЕТЫРЕ ЧЕТВЕРКИ

Можете ли вы найти все числа от 1 до 20, используя только числа 4 и любые математические операции?



Дополнительные вопросы.

Можете ли вы найти несколько способов составления каждого числа из четырех четверок?

Можете ли вы составить таким образом число больше 20?

Можете ли вы найти отрицательные целые числа с помощью четырех четверок?

Это превосходное задание на применение математических операций, но оно ничем не напоминает задачу на отработку математических операций, поскольку операции изящно встроены в нее. Когда мы выложили эту задачу на youcubed.org, учителя сказали нам, что она очень увлекательна. Вот комментарии двух наших посетителей.

> Задача с четырьмя четверками так вдохновила и увлекла моих учеников, что они решили исследовать три тройки — и их идеям не было конца.
>
> Задача с четырьмя четверками великолепна! Я использовала ее на уроке математики в шестом классе, и ученики составили уравнения, которые повлекли за собой обсуждение таких тем, как свойство дистрибутивности, порядок выполнения операций, переменные… Это было прекрасно!

Полное описание задачи на YouCubed содержит рекомендации по способам постановки задачи и организации работы учеников; см. https://www.youcubed.org/wim-day-1.

Еще один способ превратить задачу в исследование — предложить ученикам написать статью, информационный бюллетень или небольшой рассказ о ней. Такая схема применима к любому материалу. В девятом классе школы Рейлсайд ученикам поручили написать книгу по теме $y = mx + b$; ученики исписали

много страниц объяснениями того, что значит это уравнение, как его представить в графическом виде, когда его можно использовать и каковы их идеи по поводу его значения. Во время учебного модуля по геометрии в средней школе, который я разработала со своими студентами из Стэнфорда (Дэном Мейером, Сарой Селлинг и Кэти Сан), мы предложили ученикам написать информационный бюллетень о подобии, используя фотографии, задачи, анимацию и любые другие средства, которые помогут показать, что они знают об этой теме. В примере 5.7 представлена общая форма задания с информационным бюллетенем, которые мы разработали.

ПРИМЕР 5.7. ИНФОРМАЦИОННЫЙ БЮЛЛЕТЕНЬ

Вы пишете информационный бюллетень, чтобы рассказать, что вы узнали об этой математической теме, членам семьи и друзьям. Вы можете показать свое понимание соответствующих идей и объяснить, почему математические концепции, которые вы изучили, так важны.

Опишите также пару видов деятельности, которыми занимались и которые показались вам интересными.

Составляя свой бюллетень, вы можете воспользоваться следующими ресурсами.

- Фотографии выполнения разных заданий.
- Рисунки.
- Анимация.
- Интервью или опросы.

Представленное ниже описание некоторых видов деятельности поможет вам вспомнить, как вы работали над задачей.

Пожалуйста, подготовьте четыре раздела. Вы можете изменить названия так, чтобы они соответствовали вашей работе.

Новости	Новые открытия
Объясните суть этой математической концепции, а также минимум двумя способами опишите, что она означает	Выберите минимум два разных вида деятельности, которые помогли вам понять соответствующие концепции. Для каждого вида деятельности сделайте следующее. • Объясните, почему вы выбрали его. • Объясните, что вы узнали благодаря ему. • Объясните, какие трудности были сопряжены с ним
Связи	**Будущее**
Выберите один дополнительный вид деятельности, который помог вам усвоить математическую концепцию, или процесс, который вы можете связать с изучением другой темы. Объясните, почему вы выбрали этот вид деятельности. Объясните, какую важную математическую концепцию вы изучили в процессе этой деятельности. Объясните, с чем вы связали эту концепцию и как вы представляете себе эту связь. Объясните важность этой связи и возможности ее использования в будущем	Напишите краткий обзор информационного бюллетеня. Рассмотрите следующие вопросы: Для чего можно использовать эту важную математическую концепцию? Какие вопросы о ней у вас остались?

3. Можете ли вы поставить задачу до объяснения метода ее решения?

Когда мы ставим задачи, требующие определенного метода решения, до объяснения самого метода, мы даем им прекрасную возможность для обучения и использования интуиции.

Из предыдущих примеров таковы задача на определение максимальной площади, которую можно обнести забором, а также задача на определение объема лимона. Но этот структурный элемент можно использовать в любой другой области математики — в частности, при объяснении любых стандартных методов или формул (например, площадь фигур и число π), а также таких статистических концепций, как среднее арифметическое, мода, амплитуда и стандартное отклонение.

Вместо объяснений предложите ученикам поразмышлять над ситуацией, в которой этот метод может пригодиться (пример 5.8).

ПРИМЕР 5.8. ПРЫЖКИ В ДЛИНУ

Вы хотите пройти отбор в команду по прыжкам в длину; для этого ваш средний результат должен составлять 5,2 м. Тренер говорит, что будет засчитывать лучший прыжок, который вы сделаете в каждый день

недели, а затем вычислит среднее значение. Вот ваши пять прыжков. К сожалению, в пятницу у вас был низкий показатель, потому что вы не очень хорошо себя чувствовали.

День	Метры
Понедельник	5,2
Вторник	5,2
Среда	5,3
Четверг	5,4
Пятница	4,4

Как вычислить среднее значение, которое справедливо отразит ваши результаты? Вычислите несколько средних значений разными способами и определите, какое из них, на ваш взгляд, самое справедливое. Объясните свой метод и попытайтесь убедить кого-нибудь в том, что он лучший.

После того как ученики попытались найти свои способы определения средней величины и обсудили их в группах и со всем классом, им можно объяснить формальные методы определения среднего арифметического, моды и амплитуды.

4. Можно ли включить в задачу визуальную составляющую?

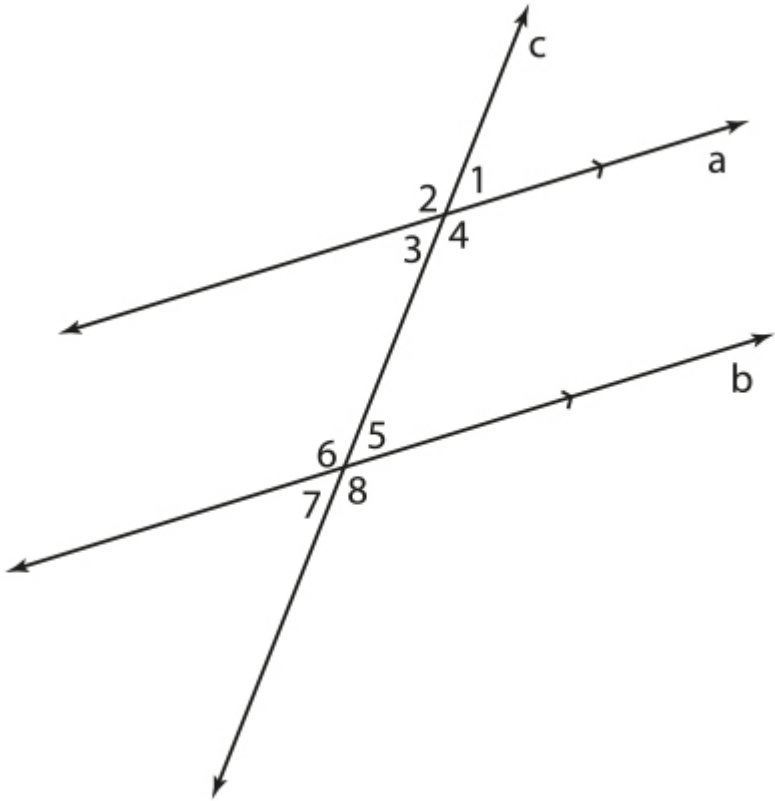
Визуальное представление очень заметно влияет на учеников, обеспечивая новый уровень понимания, как можно видеть в случае задачи с растущими фигурами. При этом можно использовать не только рисунки, но и физические объекты, такие как кубики или алгебраические карточки. В детстве я часто играла со счетными палочками Кюизенера, упорядочивая их и исследуя математические закономерности. В ходе онлайн-курса, призванного показать слушателям важные математические стратегии, я объясняю, как представить в графическом виде любую математическую задачу или концепцию (см. https://class.stanford.edu/courses/Education/EDUC115-S/Spring2014/about). Графическое представление — мощный инструмент для математиков и людей, которые занимаются решением задач (большинство из них могут нарисовать любую задачу). Когда на уроке математики ученики топчутся на месте, я часто предлагаю им нарисовать задачу.

В школе Рейлсайд (очень успешной школе, работу которой я изучала) ученикам предложили отображать связи с помощью цветового кодирования. Например, на уроках алгебры ученики должны описывать функциональные соотношения разными способами: с помощью выражения или рисунка, в вербальной форме или в виде графика.

Таких форм представления требуют во многих школах. Нестандартный подход Рейлсайд состоял в том, что там предложили ученикам отмечать соотношения цветом — например, показывать ось *x* в одном и том же цвете в выражении, на графике и в диаграмме. В главе 7, где приведено более подробное описание подхода школы Рейлсайд, представлен пример задач с элементами цветового кодирования. В других областях (например, предлагая ученикам определить конгруэнтные, вертикальные и смежные углы) также можно попросить раскрасить и записать как можно больше соотношений, выделив соотношения цветом (пример 5.9 и рис. 5.18). Другие примеры цветового кодирования приведены в главе 9.

ПРИМЕР 5.9. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И СЕКУЩАЯ

1. Выделите конгруэнтные углы с помощью цветового кодирования.
2. Определите вертикальные и смежные углы.
3. Запишите соотношения, которые вы видите. В своих записях используйте те же цвета, что и на рисунке.



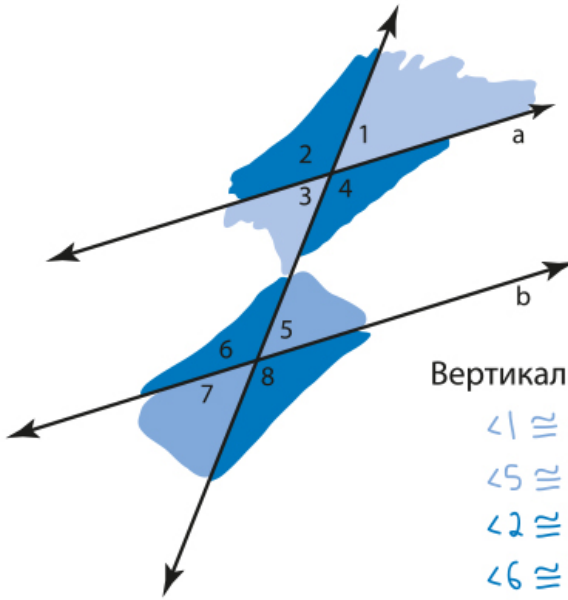
Вертикальные углы: _____
Смежные углы: _____
Соотношения: _____

Параллельные прямые и секущая (решение примера 5.9)

1. Выделите конгруэнтные углы с помощью цветового кодирования.

2. Определите вертикальные и смежные углы.

3. Воспользовавшись теми же цветами, что и на рисунке, запишите как можно больше соотношений



Вертикальные углы

$\angle 1 \cong \angle 3$

$\angle 5 \cong \angle 7$

$\angle 2 \cong \angle 4$

$\angle 6 \cong \angle 8$

Соотношения

$m\angle 1 + m\angle 4 = 180^\circ$

$m\angle 2 + m\angle 3 = 180^\circ$

$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 360^\circ$

$m\angle 7 = m\angle 1$

$\angle 8 \cong \angle 2$

$m\angle 7 + m\angle 4 = 180^\circ$

Смежные углы

$\angle 1 \text{ и } \angle 2$

$\angle 3 \text{ и } \angle 4$

$\angle 5 \text{ и } \angle 6$

$\angle 7 \text{ и } \angle 8$

Рис. 5.18. Выделение углов методом цветового кодирования

5. Можете ли вы сформулировать задачу так, чтобы она относилась к категории «низкий пол, высокий потолок»?

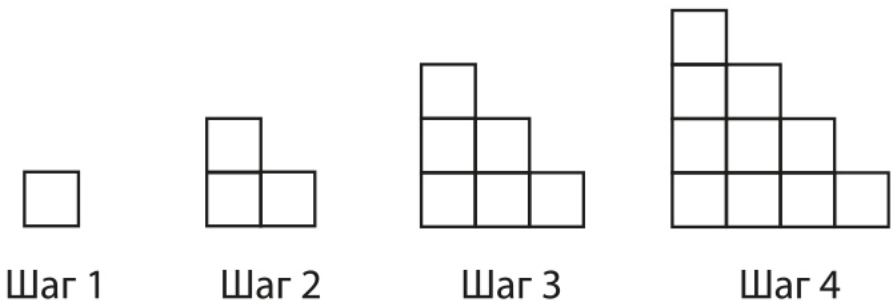
Все представленные выше задачи относились к категории «низкий пол, высокий потолок». Благодаря высокой степени свободы они доступны для широкого круга учеников, которые могут перейти на более высокий уровень.

Один из способов сделать «пол» ниже сводится к тому, чтобы всегда спрашивать учеников, как они представляют себе задачу. Этот замечательный вопрос заслуживает внимания и по другим причинам.

Превосходная стратегия, позволяющая повысить «потолок» задачи, состоит в том, чтобы предложить ученикам, которые уже нашли ответ на вопрос, написать новый, аналогичный первому, но более сложный. Во время обучения смешанной группы учеников в летней школе мы часто использовали эту стратегию и получали впечатляющие результаты. Например, когда мальчик

Алонсо закончил решать задачу с лестницей, в которой ученики должны были поразмышлять над ростом закономерности и шагом *n* (пример 5.10), он задал более трудный вопрос: как будет расти лестница в четырех направлениях и сколько кубиков будет на *n*-м шаге? (рис. 5.19.)

ПРИМЕР 5.10. ЛЕСТНИЦА



Как вы представляете себе рост закономерности?
Сколько ячеек было бы на шаге 100?
Сколько ячеек было бы на шаге *n*?

Когда ученикам предлагают задать вопрос посложнее, они часто загораются этой идеей: их увлекает возможность использовать свое мышление и творческий подход. Учителя могут без труда использовать такое расширение на любом уроке. Попробуйте дать ученикам следующее задание в контексте любой совокупности математических вопросов.

А теперь вы напишете вопрос; постарайтесь, чтобы он был трудным.:)

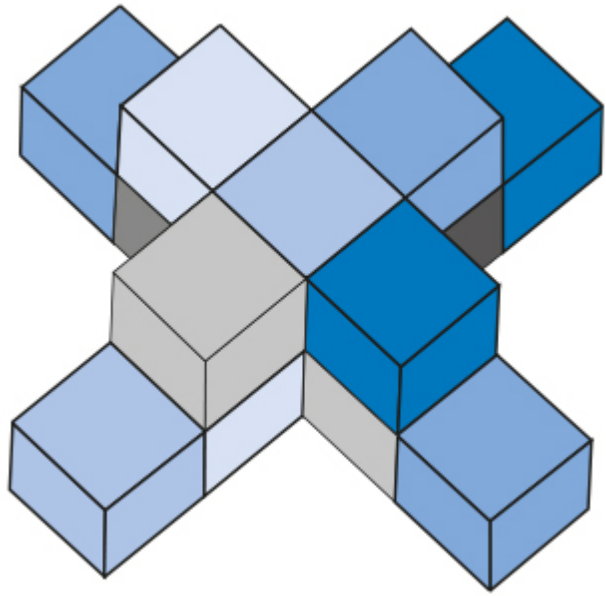


Рис. 5.19. Расширенная задача Алонсо

Ученики могут задавать вопросы одноклассникам — очень вдохновляющий подход. Эта стратегия особенно уместна для учеников, которые работают быстрее других и жалуются, что для них эта работа слишком легкая: ведь такой подход требует глубоких и напряженных размышлений.

6. Можете ли вы включить в задачу условие о необходимости убеждать и рассуждать?

Построение логических рассуждений — основа математики. Когда ученики приводят свои аргументы и критикуют рассуждения других, они ведут себя как истинные математики и готовятся к миру высоких технологий, в котором им предстоит работать, а также к сдаче тестов. Кроме того, логические рассуждения дают путь к пониманию материала. В ходе четырехлетнего исследования, охватившего разные школы, мы обнаружили, что логические рассуждения играют особенно важную роль в обеспечении равенства, помогая сократить разрыв между учениками, которые понимают математику, и теми, кому она дается с трудом. Во время каждой дискуссии ученикам предлагали рассуждать логически, объясняя, почему они выбрали те или иные методы и почему их применение имеет смысл. Тем, кто не понял соответствующую тему, это позволяло разобраться в ней и задать вопросы, что еще больше углубляло знания ученика, который объяснил свой выбор метода.

Мне нравится дополнять любимые задачи на стимулирование

логических рассуждений педагогической стратегией, у которой есть ряд преимуществ. Я узнала о ней от Кэти Хамфриз, которая предлагает своим ученикам быть скептиками. Она утверждает, что существует три уровня убеждения (Boaler & Humphreys, 2005).

- Убедить себя.
- Убедить друга.
- Убедить скептика.

Убедить себя или друга легко, но, чтобы убедить скептика, понадобятся рассуждения очень высокого уровня. Кэти говорит ученикам, что они должны быть скептиками, побуждая других всегда формулировать исчерпывающие и убедительные аргументы.

Марк Дрисколл разработал идеальную задачу для обучения и стимулирования рассуждений более высокого уровня, в которую можно включить роль скептика. Она называется «Складывание бумаги». Я использовала эту задачу в самых разных группах, и все они работали над ней очень увлеченно. Учителя говорят мне, что им нравится эта задача: часто она дает возможность проявить себя тем, кто раньше не мог этого сделать. Ученики работают парами с квадратным листом бумаги. Им предлагают складывать ее так, чтобы получить новые фигуры. В примере 5.11 показаны пять заданий с растущим уровнем сложности.

ПРИМЕР 5.11. СКЛАДЫВАНИЕ БУМАГИ

Работайте с партнером. По очереди берите на себя роль скептика или убеждающего. Когда вы выступаете в качестве убеждающего, ваша задача — убеждать! Приводите аргументы. Скептики должны относиться ко всему скептически! Не давайте легко убедить себя. Требуйте аргументов и обоснований, имеющих для вас смысл.

В каждом из представленных ниже заданий один участник должен сложить фигуру, а затем убедить другого. Ваш партнер играет роль скептика. Когда вы перейдете к следующему заданию, поменяйтесь ролями.

Начните с квадратного листа и сделайте на нем сгибы так, чтобы построить новую фигуру. Затем объясните, почему вы считаете, что созданная вами фигура имеет искомую площадь.

1. Постройте квадрат, площадь которого равна $^1/_4$

площади исходного. Убедите своего партнера в том, что это квадрат и его площадь составляет $^1/_4$ исходной.

2. Постройте треугольник, площадь которого равна $^1/_4$ площади исходного квадрата. Убедите партнера в том, что площадь этого треугольника составляет $^1/_4$ исходной.

3. Постройте еще один треугольник, площадь которого также равна $^1/_4$ площади исходного квадрата и который не конгруэнтен треугольнику, построенному в предыдущей задаче. Убедите партнера в том, что площадь этого треугольника составляет $^1/_4$ исходной.

4. Постройте квадрат, площадь которого равна $^1/_2$ площади исходного. Убедите партнера в том, что это квадрат и его площадь составляет $^1/_2$ исходной.

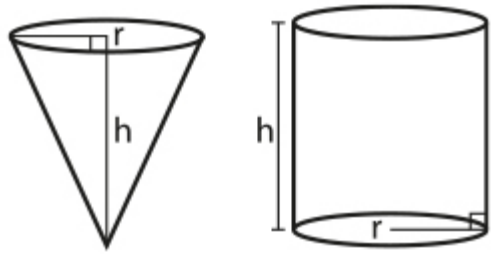
5. Постройте еще один квадрат, площадь которого также равна $^1/_2$ площади исходного, но который ориентирован иначе, чем квадрат, построенный в задаче 4. Убедите партнера в том, что площадь этого квадрата составляет $^1/_2$ исходной.

Источник: Driscoll, 2007, p. 90, http://heinemann.com/products/E01148.aspx.

Когда я поставила эту задачу учителям, они долго трудились над заданием 5, причем некоторые из них работали до самого вечера после целого дня занятий по профессиональному развитию, наслаждаясь каждым моментом. Такую вовлеченность усиливает наличие физической фигуры, с которой можно работать и которую можно менять, а также необходимость убеждать партнера. Ставя перед учениками и учителями эту задачу, я предлагаю парам партнеров по очереди брать на себя разные роли: один складывает лист бумаги и убеждает другого, а другой становится скептиком, а в следующем задании они меняются ролями. Предлагая ученикам играть роль скептиков, я объясняю, что они должны требовать от партнеров, чтобы те убедили их в своей правоте. Ученикам нравится требовать друг от друга убедительных аргументов. Это помогает им освоить метод математических рассуждений и доказательств. Возможно, вам как учителю нужно будет продемонстрировать ученикам, что такое убедительный ответ, задавая дополнительные вопросы, если их аргументы недостаточно убедительны.

Еще один пример задачи, требующей убеждения, представлен в примере 5.12. Условие о необходимости рассуждать и убеждать можно включить в любую математическую задачу.

ПРИМЕР 5.12. КОНУС И ЦИЛИНДР



Конус и цилиндр имеют одинаковые высоту и радиус. Чему равно соотношение их объемов? Сделайте предположение и попытайтесь убедить других учеников в его истинности. Чтобы вышло убедительно, используйте рисунки, модели и цветовое кодирование.

Резюме

Когда математические задачи открыты для разных способов восприятия, методов решения и вариантов представления, все меняется.

Математические задачи, ориентированные на закрытое, фиксированное мышление, можно превратить в задачи, которые ориентированы на мышление роста и в которых есть пространство для обучения. Ниже представлены пять рекомендаций, которые помогут открыть математические задачи и расширить их возможности в плане обучения.

1. Расширьте задачу так, чтобы она допускала разные методы решения и способы представления.
2. Включите в задачу возможности для исследований.
3. Ставьте задачу до объяснения метода ее решения.
4. Включите в задачу визуальную составляющую.
5. Расширьте задачу так, чтобы она относилась к категории «низкий пол, высокий потолок».
6. Предложите ученикам рассуждать и убеждать, а также быть скептиками.

Другие примеры задач с такими свойствами представлены в главе 9.

Воспользовавшись этими способами видоизменения задач, вы откроете перед учениками более широкие и глубокие возможности для обучения. При таком подходе и при наличии

математического мышления учителя (и родители) могут создавать и изменять математические задачи, обеспечивая всем ученикам благоприятные условия для изучения математики.

На следующих сайтах представлены математические задачи, обладающие одним или несколькими из тех свойств, которым я придаю особое значение.

- YouCubed: www.youcubed.org.
- Национальный совет преподавателей математики (NCTM): www.nctm.org (доступ к некоторым ресурсам могут получить только члены NCTM).
- Разъяснения NCTM: http://illuminations.ntcm.org.
- Сбалансированная оценка: http://balancedassessment.concord.org.
- Математический форум: www.mathforum.org.
- Shell Center: http://map.mathshell.org/materials/index.php.
- Ресурсы Дэна Мейера: http://blog.mrmeyer.com.
- Geogebra: https://www.geogebra.org.
- Проект Video Mosaic: http://videomosaic.org.
- NRich: http://nrich.maths.org.
- Оценка 180 градусов: http://www.estimation180.com.
- Визуальные закономерности; классы 1–12: http://www.visualpatterns.org.
- Числовые строки: http://numberstrings.com.
- Mathalicious, классы 6–12; уроки для средних и старших классов: http://www.mathalicious.com.

Глава 6. Математика и путь к равенству

Меня волнует проблема равенства. Я хочу жить в мире, где каждый может изучать математику и получать удовольствие от нее, имеет поддержку независимо от национальности, пола, дохода и т. п. Мне хотелось бы приходить на уроки математики и видеть, что все ученики с радостью и воодушевлением изучают предмет, не беспокоясь о том, будут ли их считать «умными» и есть ли у них «математический ген». Но пока в математике царят самые большие и самые неоправданные различия в части успеваемости и вовлеченности учеников разной этнической принадлежности, пола и уровня доходов по сравнению с другими дисциплинами (Lee, 2002).

Я много лет проводила исследования с участием учителей, работа которых была направлена на обеспечение справедливых результатов в математике и которые добились очень больших успехов. Благодаря этому я узнала о способах создания благоприятных условий для проведения уроков математики, на которых все ученики имеют равные возможности. В этой и следующей главах я расскажу о стратегиях такого рода. Но сначала вкратце затрону вопрос, о котором редко говорят, но который, на мой взгляд, лежит в основе неравенства в математике.

Элитизм разрушает математику

Математика — прекрасная дисциплина, в которой есть много идей и связей, способных вдохновить учеников. Но, как уже говорилось, ее слишком часто преподносят как предмет, ориентированный на результат и выявляющий тех, у кого есть «математический ген». В США математика втянута в культуру достижений и часто играет элитистскую роль. Ее можно подавать как удивительную науку, доступную всем; своего рода призму, сквозь которую можно рассматривать мир; путь к важным знаниям, которые расширяют возможности тех, кто готов упорно трудиться и размышлять над своей работой и жизнью в количественных категориях. А можно подать ее как фактор, который разделяет детей на способных и неспособных, умных и глупых. Некоторые радуются недоступности математики в ее теперешнем виде (особенно если их дети успешно справляются с

этим предметом), поскольку стремятся сохранить это явное социальное преимущество. К счастью, есть и люди, охотно принимающие перемены (даже если их дети преуспевают), особенно когда они узнают о том, что преимущество их детей сейчас основано на знаниях, которые никак не помогут им в будущем.

Миф о математически одаренном ребенке

Некоторые люди, даже учителя, самоопределялись, убеждая себя в собственной математической исключительности, генетическом превосходстве перед другими. Люди изо всех сил держатся за эту идею. Но уже есть много данных в пользу того, что, хотя люди рождаются с определенными особенностями мозга, их затмевает опыт, накапливаемый в течение жизни, поскольку мозг растет каждую секунду (Thompson, 2014; Woollett & Maguire, 2011). Даже люди, которых общество относит к числу гениев, упорно трудились, чтобы добиться успеха. Эйнштейн научился читать только в девять лет и не сдал вступительные экзамены в колледж, но очень много работал и мыслил позитивно, понимая ценность ошибок и настойчивости. Однако вместо признания роли и ценности упорного труда система образования США сосредоточилась на «одаренных» учениках, которым дают разные возможности, причем зачастую только потому, что они быстро запоминают факты. Это негативно сказывается не только на тех, кого считают «середнячками» и слабыми, но и на самих «одаренных»: у них формируется фиксированное мышление, они становятся уязвимыми и менее склонными к риску. Внедряя в школах программы для одаренных детей, мы говорим ученикам, что некоторые из них отличаются от остальных на генетическом уровне. Однако, по данным ряда исследований, многие люди, которых в детстве считали одаренными, в зрелые годы живут обычной жизнью (http://ireport.cnn.com/docs/DOC-332952).

В своем бестселлере «Гении и аутсайдеры» Малкольм Гладуэлл раскрывает природу профессиональной компетентности. Опираясь на результаты обширного исследования Андерса Эрикссона и его коллег, Гладуэлл отмечает, что все специалисты высокого уровня, в том числе крупные математики, работали в своих областях минимум 10 тысяч часов. Некоторые люди, добившиеся серьезных успехов в математике, не считают нужным гордиться тем, как много они на самом деле занимались; они предпочитают думать и говорить,

что талант дан им от рождения. А другие, которые тоже много учились, считают себя обманщиками: ведь их результаты потребовали больших усилий. Многие прекращают заниматься математикой, считая, что им в ней не место (Solomon, 2007). Многие осознают, что неравенство в изучении математики обусловлено стереотипами, и борются с ними. К сожалению, есть и те, кто (не всегда осознанно) делает все возможное для усугубления несправедливости.

Некоторые учителя математики (к счастью, я таких знаю немного) считают, что они в чем-то превосходят учителей по другим предметам и их задача — найти горстку учеников, обладающих такими же исключительными способностями. Один знакомый учитель средней школы каждый год неизменно ставил 70% учеников низшие оценки за каждый урок математики, связывая их низкую успеваемость не со своим подходом к преподаванию, а с тем, что, по его мнению, у детей не было способностей. Он считал себя вправе ставить низкие оценки, хотя это не позволяло детям успешно окончить среднюю школу, мнил себя «хранителем математики» и видел свою цель в том, чтобы только «звезды» выходили на более высокий уровень. На математических факультетах некоторых вузов студентам снижают итоговые оценки, если они ходят на консультации и обращаются за помощью: заслуживающий восхищения упорный труд воспринимается в таких учебных заведениях как признак отсутствия таланта. Такая элитистская идея в сочетании со стереотипами об одаренности порождает неравноправие. Чтобы понять влияние культуры элитизма и одаренности в математике в США, достаточно проанализировать национальные данные о том, кто изучает высшую математику. В 2013 году мужчины составляли 73% общего количества кандидатов на соискание степени доктора наук в области математики, а представители белой и азиатской расы — 94%. Доля женщин, претендовавших на степень доктора наук в математике, в период с 2004 по 2013 год сократилась с 34 до 27% общего количества докторантов (Vélez, Maxwell, & Rose, 2013). И эту проблему стоит обсудить на самом высоком уровне.

Женщины недостаточно представлены в большинстве дисциплин STEM, но есть и гуманитарные дисциплины, в которых недостаток женщин еще более выражен. Например, в США доля женщин, изучающих молекулярную биологию, составила 54% общего количества докторантов, а среди докторантов, изучающих философию, их всего 31%. Это заинтересовало исследователей, которые попытались проанализировать причины существования различных моделей представленности. Они обнаружили, что

недостаток женщин (и афроамериканцев) отмечается в тех дисциплинах, где преподаватели считают врожденный талант главным условием успеха (Leslie, Cimpian, Meyer, & Freeland, 2015). Как я уже говорила в главе 1, именно преподаватели математики придерживаются самых жестких установок в отношении того, кто может изучать этот предмет. Вдобавок исследователи пришли к выводу, что чем больше в той или иной области ценится одаренность, тем меньше в ней докторов наук женского пола (такая зависимость была обнаружена во всех тридцати областях, которые они изучили). Это приводит к тому, что математикой занимается меньше женщин: на них сильнее действуют стереотипы о том, кто может заниматься математикой (Steele, 2011).

Кэрол Дуэк, Кэтрин Гуд и Анита Раттан провели исследование, чтобы определить, сколько учащихся испытывают чувство принадлежности к математике (Good, Rattan, & Dweck, 2012) — другими словами, насколько они чувствуют себя членами математического сообщества и насколько хорошо их принимают авторитеты в их области. Исследователи сделали вывод, что от ощущения принадлежности и принятия, которые испытывают ученики, зависит, станут ли они заниматься математикой в будущем. Исследователи проанализировали также факторы окружающей среды, повлиявшие на их чувство принадлежности, и сделали вывод, что его формированию препятствовали два фактора. Одним из них оказался сигнал о том, что способности к математике — врожденное качество, а другим — стереотип о том, что у женщин меньше способностей к математике, чем у мужчин. На мужчин эти стереотипы не действуют. И «математические комплексы» у женщин приводили к тому, что они изучали меньше курсов по математике и получали более низкие оценки. Женщины, которым говорили, что способности к математике можно развить, были защищены от негативных стереотипов; они испытывали сильное чувство принадлежности и были полны решимости заниматься математикой в будущем.

Есть и еще одна проблема: интеллектуальный пьедестал, на который многие возводят математику. Людей, которые умеют быстро делать вычисления, считают умными и особенными. Но почему? Математика не труднее любого другого предмета; предлагаю людям, которые думают иначе, написать шедевр поэзии или живописи. Все дисциплины сложны; многие считают, что математика труднее всего, потому что методы ее преподавания часто не позволяют ученикам освоить ее. Если мы хотим дать доступ к математике большему количеству людей,

необходимо изменить наши представления об этой дисциплине.

Когда неравенство в распределении учебной нагрузки незаконно

Процесс принятия решений о распределении учебной нагрузки в старших классах — одна из причин неравноправия в области математики. Специализация обучения в старших классах отчасти определяет будущие возможности школьников. Чтобы поступить в большинство университетов страны, нужно изучать математику в старших классах минимум три года. Получается, преподаватели старших классов должны стремиться обеспечить всем ученикам возможность прохождения необходимых курсов математики. Недавнее исследование о распределении учебной нагрузки в старших классах показало ряд интересных (и настораживающих) фактов.

В 2012 году фонд Noyce Foundation провел исследование, в ходе которого была проанализирована система распределения учебной нагрузки учеников в девяти школьных округах района Сан-Франциско. Было установлено, что более 60% учеников, которые прошли курс алгебры в восьмом классе и (или) выполнили или превысили стандарты штата по результатам теста CST[13], после поступления в старшие классы снова были зачислены на курс алгебры; им пришлось повторно изучать материал (Lawyers' Committee for Civil Rights of the San Francisco Bay Area, 2013). Это ограничило для них возможности развития, и многим так и не удалось подняться на более высокий уровень. В большинстве средних школ только те ученики, которые начинают обучение в старших классах с курса геометрии, могут рассчитывать на то, что их зачислят на углубленный курс статистики или анализа. Но зачем повторно изучать курс алгебры, если ученикам важно повысить свой уровень и они уже прошли этот курс? Изучив имеющиеся данные, исследователи Noyce Foundation обнаружили, что большинство учеников, повторно проходящих учебные курсы, — латиноамериканцы и афроамериканцы. 52% учеников азиатского происхождения изучали алгебру-1[14] в восьмом классе и 52% — геометрию в девятом. Среди белых учеников доля изучающих алгебру снизилась: 59% проходили ее в восьмом классе, но только 33% были зачислены на курс геометрии в девятом. Настораживает, что 53% афроамериканцев изучали алгебру в восьмом классе и всего 18% — геометрию в девятом, 50% латиноамериканцев изучали алгебру в восьмом классе и только 16% — геометрию в девятом.

Отсев *большинства* учеников из числа афроамериканцев и латиноамериканцев, которые сдали алгебру, на более низкий уровень обучения — явный пример расовой дискриминации. Благотворительный фонд Silicon Valley Community Foundation предпринял неординарный шаг: нанял юристов для исправления ситуации. Те пришли к выводу, что в этих школах был нарушен закон. Заключение юристов гласило: «Намеренное принятие таких решений о зачислении на учебные курсы, которые оказывают несоразмерное воздействие на учеников из числа национальных меньшинств, нарушает законы штата и федеральные законы. Но лица, ответственные за принятие решений о распределении учебной нагрузки по математике, несут правовую ответственность и тогда, когда неправильные решения становятся непреднамеренным результатом применения вроде бы объективных критериев оценки уровня знаний, оказывающих несоразмерное влияние на старшеклассников из числа национальных меньшинств». Возможно, учителя математики и не стремятся дискриминировать учеников по расовой или этнической принадлежности, но нарушают закон даже в случае, когда используют другие критерии (например, выполнение домашних заданий), оказывающие на цветных учеников большее влияние, чем на остальных. Одним из самых важных достижений участников движения за гражданские права в США стало то, что решающим критерием считается именно общее воздействие. Юристы из Сан-Франциско подчеркнули, что система распределения учебной нагрузки, которая приводит к неравенству, незаконна.

Вряд ли учителя, которые приняли участие в этом исследовании, стремились чинить кому-то препятствия на пути к успеху. Скорее имел место просто скрытый расизм: мнение, что математика высшего уровня «не для цветных». Один директор средней школы из другого района Калифорнии попросил меня проанализировать вместе с ним данные по его школе. Его беспокоило то, что ученики, которые прошли курс алгебры в восьмом классе, на следующий год были вынуждены проходить его еще раз. Вместе проанализировав все данные, мы не увидели связи между уровнем успеваемости и зачислением на учебные курсы, хотя ее не могло не быть. Мы увидели связь иного рода: зависимость между этнической принадлежностью и распределением учебной нагрузки. На более высокий уровень продвигали в основном белых учеников, а латиноамериканцев зачисляли на повторный курс. Я сразу увидела в этом все ту же расовую дискриминацию и спросила директора, как это могло произойти. Он объяснил, что учителя девятого класса

рекомендовали учителям восьмого класса не продвигать тех учеников, которые могут не оправдать ожиданий, и если дети не сдают домашние задания вовремя или не демонстрируют особых успехов на уроках, их следует направить на повторный курс. Позже одному из учителей старшей школы даже удалось инициировать введение во всем школьном округе правила, согласно которому ребенок, направленный в правоохранительные органы в связи с серьезным нарушением дисциплины, не мог изучать курс алгебры в восьмом классе ни в одной из школ округа. Это кажется невероятным, но это правда. Таково мышление «хранителей математики».

Когда фонд Noyce Foundation обнаружил проблему, а фонд Silicon Valley Foundation взял на себя ответственность за стимулирование школьных округов к исправлению ситуации, в ряде округов были внесены изменения в систему распределения учебной нагрузки. Последствия не заставили себя ждать. Отныне были исключены оценочные суждения учителей и зачисление учеников на курсы более высокого уровня только на основании данных о завершении курса обучения и результатов тестов. Руководители школ и школьных округов взяли на себя обязательство организовать оперативную работу на протяжении лета, чтобы использовать результаты тестов, которые поступают только за несколько недель до начала учебного года. Были сформированы особые рабочие группы, призванные отслеживать проблему и в самом начале учебного года переводить учеников на курс более высокого уровня, если их ошибочно зачислили на повторный. Расовое неравенство исчезло почти сразу.

Есть и другое решение: не делить учеников на группы или классы по уровню успеваемости. Когда подростки проваливают тест по алгебре и проходят повторный курс, обычно они показывают такие же или еще *более низкие* результаты и на следующий год (Fong, Jaquet, & Finkelstein, 2014). Неудивительно: ведь они получают сильнейший сигнал о неудаче и ставят на себе крест. Мне больше по душе другое решение: ставить высокие ожидания и давать широкие возможности всем, зачислять всех на курс геометрии или интегрированный курс математики в первый же год обучения в старшей школе независимо от оценок по алгебре, давая возможность начать все с чистого листа. Многие в ответ возразили бы, что ученики не освоили необходимый материал, чтобы успешно изучать такие курсы. Но для успешного изучения геометрии курс алгебры некритичен. В следующей главе я расскажу о работе учителей, которые формируют разнородные группы учеников и объясняют сложный учебный материал всем, демонстрируя поразительное влияние такого подхода на уровень

успеваемости и на стратегии, которые используют школьники, чтобы добиться успеха.

В Англии ученики в шестнадцать лет сдают очень важный итоговый экзамен по математике — GCSE[15]. От оценок за него зависит, какие курсы будут доступны им в будущем и на какую профессию они смогут претендовать. Например, чтобы стать учителем, кандидатам необходима высокая оценка за экзамены GCSE как по английскому языку, так и по математике. Экзамен по математике проводится на двух уровнях. Ученики, сдающие экзамен по математике высшего уровня, могут получить оценку от A до D, а ученики, участвующие в экзамене низшего уровня, — только C или более низкие оценки[16]. Решение о том, экзамен какого уровня будет сдавать ученик, крайне важно. К сожалению, оно принимается слишком рано для многих учеников; при этом они изучают необходимый материал за пять или более лет до самого экзамена. В ходе моего исследования, которое проводилось в двух школах Англии (Boaler, 2002a), было установлено, что в одной из школ разделили учеников на группы высокого и низкого уровня, причем во вторых обучали по программе, соответствующей экзамену низшего уровня. Им три года давали более легкие задачи, с которыми они справлялись успешно и верили, что могут хорошо сдать экзамен. Они даже не знали, что их готовят к сдаче экзамена низкого уровня, по которому они могут получить оценку не выше C. Когда ученики поняли, что попали в число сдающих экзамен низшего уровня, многие испытали огромное разочарование и перестали стараться.

А в другой английской школе предприняли шаг, который в остальных учебных заведениях сочли слишком смелым: всем ученикам дали возможность сдать экзамен высшего уровня, независимо от успеваемости или предыдущей подготовки. Результаты поразительны: доля высоких оценок увеличилась с 40 до более чем 90%. Директор школы объяснил мне, что других изменений в школе не было; там просто начали преподавать всем математику более высокого уровня. Ученики, получившие этот позитивный сигнал и благоприятную возможность, продемонстрировали поразительную реакцию, занявшись математикой высшего уровня и открыв себе дорогу к лучшему будущему. Нужно, чтобы учителя верили во всех учеников и стремились сделать математику доступной для всех. В этой и следующей главах идет речь о том, как добиться этого.

Для учителей математики изменение представлений о том, кто может изучать математику высшего уровня, не только вопрос распределения учебной нагрузки. На уроках они каждый день решают, что могут делать ученики, и от этого зависит будущее

детей. Планировать урок математики, предполагая, что конкретные ученики справятся с заданием лучше других, вполне естественно. Но с этим стоит бороться, чтобы разорвать порочный круг низкой успеваемости.

Каждый год я организую для своих студентов поездку в удивительную школу Life Academy — муниципальную школу в калифорнийском Окленде, где каждый день подрывают основы неравенства. Среди ее учеников 74% латиноамериканцев, 11% афроамериканцев, 11% учеников азиатского происхождения, 2% филиппинцев, 1% индейцев и 1% белых; при этом 92% учеников имеют право на бесплатные обеды. Школа расположена в районе города, в котором, как ни прискорбно, банды и убийства — обычное явление. Учителя Life Academy делают все возможное, чтобы обеспечить безопасность, внушить ученикам мысль о том, что они могут добиться высоких успехов, и помочь им поверить в то, что они непременно поступят в колледж. Учителя математики преподают свой предмет в классах с неоднородным составом, применяя метод комплексного обучения, позволяющий всем ученикам изучать курсы математики высшего уровня, необходимые для поступления в колледж. В Life Academy много достижений: школа обеспечивает самый высокий коэффициент приема в колледжи среди всех старших средних школ Окленда, а доля учеников, которые оканчивают школу, будучи готовыми к учебе в колледже благодаря изучению тех курсов, которые требуются для этого в Калифорнии, составляет целых 87% — больше, чем в пригородных школах богатых районов неподалеку от Стэнфорда. Некоторые учителя считают, что в старших классах средней школы определенные ученики не могут добиться высокой успеваемости, потому что они живут в бедных районах или у них нет необходимой подготовки. В главе 1 я упомянула учителей, которые выдвинули этот аргумент перед школьным советом. Но в школе Life Academy каждый день доказывают ошибочность подобных представлений.

Не так давно в рамках подготовки моего онлайн-курса я вместе со своими студентами взяла ряд интервью у прохожих Сан-Франциско. Мы опросили тридцать горожан разного возраста, этнической принадлежности и социально-экономического положения. Все интервью мы начинали с вопроса: «Скажите, пожалуйста, как вы относитесь к математике?» И все без исключения респонденты сразу начинали рассказывать, какие оценки по математике они получали в школе. Этого не произошло бы, если бы мы спросили прохожих, как они относятся к искусству, естественным наукам или литературе. Но в жизни людей, которые воспитывались в культуре достижений,

математика сыграла жестокую роль инструмента оценки их ценности.

Я знакома со многими родителями, которые спокойно относятся к успехам своих детей в изучении английского языка, естественнонаучных дисциплин и других школьных предметов, но очень беспокоятся по поводу математики. Как правило, такие родители хотят, чтобы их дети как можно быстрее приступили к изучению высшей математики и проходили углубленные курсы, как будто иначе они начнут отставать или потеряют преимущество. Это прискорбно. Ведь мы знаем, что именно дети, которые углубленно изучают математику с раннего возраста, чаще прекращают заниматься этой дисциплиной, едва у них появляется такая возможность, и добиваются меньших успехов. Билл Джейкоб — профессор математики и заместитель председателя ученого совета Калифорнийского университета. Когда руководители школьных округов и родители задают ему вопрос об ускоренном переходе учеников к углубленному изучению математики, он рекомендует не делать этого в раннем возрасте, и говорит, что поспешность в изучении анализа часто приводит к более слабой подготовке, а также к тому, что ученики рано бросают курсы и в итоге это наносит им вред (Jacob, 2015). Кроме того, по данным Джейкоба, углубленный курс анализа не продвигает учеников вперед в области математики. Гораздо эффективнее оказывается более тщательное изучение основ. В университетах высоко ценят учеников, которые изучают анализ в старших классах, но на самом деле нет никакой необходимости спешить с углубленным изучением математики только ради более привлекательного аттестата. Кроме того, курс анализа не обязателен; многие мои студенты из Стэнфорда (даже те, которые изучают дисциплины категории STEM) не проходили его в старшей школе. Не так давно в мой кабинет в Стэнфорде пришла женщина, которая хотела пожаловаться на то, что ее школьный округ расформировал классы с углубленным изучением математики, чтобы все ученики могли изучать ее на углубленном уровне. Эта женщина начала агрессивно обвинять меня за принятые ее округом решения, но в ходе нашей беседы она испытала бурю эмоций, в том числе чувство облегчения. Сначала она сказала, что будущее ее дочери разрушено, поскольку она не может пройти курсы углубленного изучения математики. Я объяснила, что ее дочь по-прежнему может изучать математический анализ и в любом случае будет осваивать на уроках математику более высокого уровня; а если ей нужны сложные и интересные задачи, то глубокое изучение математических концепций принесет ей больше пользы, чем

ускоренный переход к изучению более продвинутого материала. В итоге женщина успокоилась и покинула мой кабинет приободренной, но все же планируя обучать свою дочь дома — только математике.

Традиционные методы преподавания математики и культура достижений, которая просочилась в структуру преподавания и изучения этой дисциплины, вредят как сильным, так и слабым ученикам. Исследования показывают, что многие ученики с высокой успеваемостью прекращают заниматься математикой, а перевод учеников в группы более высокого уровня приводит к снижению концептуального понимания (Paek & Foster, 2012). Не так давно Джефф Смит, руководитель координационного совета Британской и Международной математической олимпиады, публично заявил по поводу поспешного перевода учеников на более высокий уровень, что это «катастрофа» и «ошибка», а сильным ученикам следует глубже изучать математику, вместо того чтобы быстро переходить на более высокие уровни. Но существует еще один аспект негативного влияния культуры достижений на учеников с высокой успеваемостью. Он отражается в количестве учеников, которые делают неправильный выбор в отношении будущего. Проведенное в Англии исследование показало, что студенты выбирали математику как дисциплину, которую они будут изучать в университете, потому что всегда были сильны в ней и чувствовали себя особенными. Но в университете обнаруживали, что их окружают столь же сильные студенты, и испытывали кризис идентичности (Wenger, 1998). В окружении таких же «особенных» они теряли уверенность в себе и понимали, что сама по себе математика им никогда не была интересна (Solomon, 2007). С другой стороны, сотни студентов могли бы изучать математику и получать удовольствие от этого, но отказались от такой возможности под влиянием ложных стереотипов, которые им внушили в школе.

Исполнительный директор YouCubed Кэти Уильямс до перехода в Стэнфорд много лет была руководителем направления математики в школьном округе. По работе она встречалась со многими родителями, которые утверждали, что их детям нужно давать материал посложнее, поскольку они продвинутые и умные. Кэти всегда предлагала встретиться с учениками и проводила тест на оценку уровня знаний по математике, который помогал ей определить их потребности. В итоге она неизменно приходила к выводу, что эти ученики хорошо владеют «техническими» аспектами, но не могут уловить смысл математических концепций или объяснить, почему они работают. Например, ученики могли разделить 1 на $^3/_4$ и получить ответ, но не были

способны объяснить, в чем его суть.

Кэти объясняла родителям, что математика — обширная дисциплина, которая выходит за рамки скоростных вычислений и процедур и подразумевает понимание концепций. Она показывала им рисунок, на котором изображены три аспекта математики (рис. 6.1).

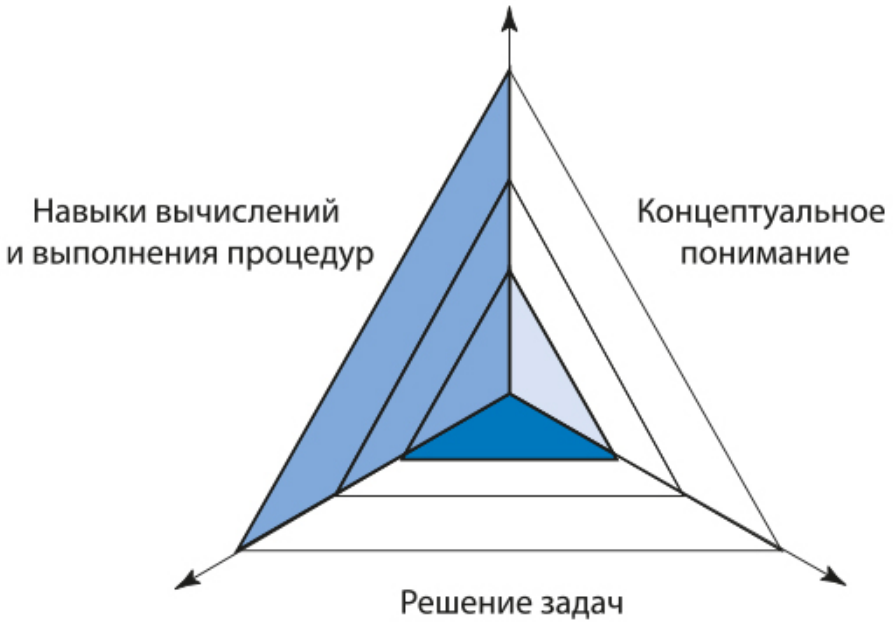


Рис. 6.1. Уравновешивание различных аспектов математики

Затем Кэти объясняла родителям, что их дети сильны в одной области математики и только начинают осваивать другие. Им нужно не столько изучать дополнительный материал, сколько понять тот, который они уже освоили, выйти за рамки многократного повторения одних и тех же процедур и научиться применять математические концепции на практике. Как показано в главе 3, именно эти аспекты математического мышления находятся в верхних строках списка требований работодателей.

Учителя не виноваты в том, что культура элитизма и достижений так распространена в сфере математики: ведь о них, как и об учениках, судят по их достижениям. Виновата культура, в которой математике отводится роль механизма отбора и показателя одаренности.

Нужно, чтобы она превратилась в открытую, обучающую дисциплину, рассчитанную как на сильных учеников, которые сейчас отказываются изучать ее, так и на слабых, не имеющих доступа к тем предметам, которые они вполне могут освоить.

Многие согласны с тем, что ученикам необходима установка на позитивное мышление. Но если мы действительно хотим донести эту мысль до них, нам стоит изменить методы подачи и преподавания математики. Я заканчиваю все свои электронные письма подписчикам YouCubed словами «Да здравствует революция!» И нам действительно нужна революция — подразумевающая изменение убеждений в отношении математики как дисциплины, а также потенциала и мышления учеников. Она подразумевает отказ от элитизма и переход от получения результатов к обучению. Эта революция подразумевает принятие математики как многоплановой, красивой дисциплины, которая доступна всем.

Справедливые стратегии

Как сделать обучение математике более справедливым? В следующих главах я подробнее расскажу о стратегиях, которые полезны всем ученикам, но некоторые из них специально предназначены для того, чтобы сделать математику более инклюзивной дисциплиной.

1. Предлагайте всем ученикам материал высокого уровня

В следующей главе представлены результаты исследований и рекомендуемые стратегии для увеличения числа учеников, которым дается возможность изучать математику высокого уровня. Сравнительный анализ данных по разным странам показал, что в США меньше детей получают возможность изучать математику высшего уровня по сравнению с другими странами (McKnight et al., 1987; Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997). Один из очевидных способов повышения успеваемости и обеспечения равенства состоит в том, чтобы увеличить число учеников, которым предоставляются возможности высокого уровня. В следующей главе я покажу лучшие способы преподавания математики высшего уровня как можно большему количеству учеников.

2. Делайте все возможное для изменения представлений о том, кто может добиться успеха в математике

Исследования Кэрол Дуэк, о которых шла речь в начале этой главы, показывают: убеждения учителей открывают или закрывают перед учениками путь к успеху, а мышление и преподавание с установкой на данность во многом объясняет тот

факт, что в сфере математики и естественных наук сохраняется дискриминация женщин и нацменьшинств. К счастью, эти же исследования показывают, что ученики с мышлением роста способны отказаться от стереотипов и добиться успеха. Необходимо, чтобы учителя формировали установки на рост в отношении своих предметов и прививали их своим ученикам как можно раньше; в главе 1, главе 2 и главе 9 представлен краткий обзор способов, позволяющих это сделать. Установки на рост в отношении математики могут сыграть важнейшую роль в создании более справедливого общества.

3. Побуждайте учеников к глубоким размышлениям

В 2014 году меня попросили выступить в Белом доме перед комиссией по вопросам женщин и девушек. В тот день заседание было посвящено обсуждению способов увеличения количества женщин, изучающих дисциплины STEM. Я сказала участникам заседания, что математика — основная причина того, что женщины и мужчины неравно представлены в дисциплинах STEM.

В ходе своих исследований (Boaler, 2002b) я обнаружила, что девочки больше, чем мальчики, стремятся к такой глубине понимания, которой во многих случаях нет на уроках математики, а другие исследования (Zohar & Sela, 2003) подтвердили это. Дело не в том, что девочкам нужно одно, а мальчикам другое, а в том, что девочкам более свойственно стремление к глубине. Они хотят знать, как работают методы, откуда они берутся и как связаны с более широкими концептуальными областями (Boaler, 2002b). Это достойная цель, и именно этого мы хотим от всех детей. К сожалению, обычно математику преподают формально, у учеников нет возможности глубоко ее понять. А когда девочки не могут глубоко осмыслить материал, они не реализуют все свои возможности, перестают интересоваться математикой. У многих из них даже возникает чувство тревоги (Organisation for Economic Co-operation and Development [ОЭСР], 2015), и недоступность глубокого понимания — одна из причин тому (Boaler, 2014a). В этом есть доля иронии: стремление размышлять глубоко и осознавать изучаемые концепции достойно восхищения, а учащиеся, у которых есть потребность в этом, лучше подходят для работы высокого уровня в области математики, естественных наук и инженерного дела. Именно они могли бы обеспечить дальнейшее развитие дисциплин STEM и разорвать порочный круг неравноправия. Но при процедурном подходе к преподаванию математики учащиеся, которым необходимо глубокое понимание (в большинстве своем девочки), лишены доступа к дисциплинам

STEM.

В ходе метаанализа 123 неформальных программ по дисциплинам STEM для девочек, в том числе летних и внеклассных кружков, исследователи составили список характеристик этих программ, которые девочки отметили как способствующие вовлеченности. Четыре самые важные из них были такими:

- практический опыт;
- проектно-ориентированная учебная программа;
- учебная программа с применением на практике;
- возможности совместной работы.

Примеры для подражания также упоминались, но девочки считали их менее важными, чем возможности совместной исследовательской работы (GSUSA, 2008). Результаты этого масштабного исследования согласуются с выводами другой работы. Согласно ей, девочки отдают предпочтение целостному подходу к математике, при котором они могут искать ответы на вопросы о том, почему, когда и как работают те или иные методы. Такому подходу, который обеспечивает более высокий уровень успеваемости, отдают предпочтение не только девочки, но создается впечатление, что им он нужен больше, чем мальчикам: без него они обычно теряют интерес к математике.

Обучение — не только накопление знаний; это процесс самоосознания, в ходе которого учащиеся решают, кто они есть и кем хотят быть (Wenger, 1998). Для многих девочек (и мальчиков) будущее, которое им предлагают на уроках математики и естественно-научных дисциплин, несовместимо с тем, к которому они стремятся (Boaler & Greeno, 2000). Многие ученики видят себя людьми мыслящими и стремящимися к взаимодействию с окружающими, способными изменить мир к лучшему (Jones, Howe, & Rua, 2000). На уроках, которые носят сугубо процедурный характер, они зачастую приходят к выводу, что все это «не для них». Это касается форм познания, занимающих особое положение на многих уроках математики и естественно-научных дисциплин, которые не оставляют места для исследований, связей и глубины понимания.

Когда математику преподают как совокупность связей и исследований, неравноправие исчезает, а уровень успеваемости повышается. В главе 4 представлено много идей по поводу такого подхода к преподаванию математики, а в главе 9 приведено много других примеров задач, методов и стратегий, позволяющих преподавать математику как открытый, справедливый предмет.

4. Учите детей работать вместе

Многие научные исследования показали преимущества совместной работы учеников для понимания математики (Boaler & Staples, 2005; Cohen & Lotan, 2014). Групповая работа — стратегия, которую я считаю важнейшей для успешного освоения математики. Но одно интереснейшее исследование показало, что групповая работа может также играть важную роль в преодолении расового неравенства в плане успеваемости по математике и изучения математических курсов.

Ури Трейсман — математик, который много лет трудился в Калифорнийском университете в Беркли, а сейчас работает в Техасском университете. В период работы в Беркли Трейсман с тревогой обнаружил, что 60% студентов-афроамериканцев проваливают тесты по анализу, и в результате многих из них отчисляют. Он сравнил опыт афроамериканских студентов с опытом студентов китайского происхождения, у которых были гораздо более высокие показатели успеваемости, проанализировал причины такой разницы и пришел к выводу, что многие гипотезы, предложенные профессорами, неверны: у студентов-афроамериканцев не обнаруживалось, как считали некоторые преподаватели, более слабой подготовки, более низкого среднего балла при поступлении или более бедного происхождения. Между двумя группами было только одно явное различие: студенты-китайцы занимались математикой совместно. По вечерам после лекций и семинаров они собирались и вместе прорабатывали задачи. Когда они сталкивались с трудными заданиями по математике, то получали поддержку — сначала понимая, что с такими трудностями сталкиваются все, а затем совместно работая над решением задач. А студенты-афроамериканцы работали самостоятельно, в уединении. Столкнувшись со сложным заданием, они приходили к выводу, что математика им не по плечу. На основании результатов исследования Трейсман инициировал внедрение в Беркли нового подхода. Студентам предлагали коллективные семинары, на которых они вместе занимались математикой и получали позитивные сигналы в отношении своего потенциала. Результаты оказались впечатляющими: за два года количество неудач сократилось до нуля, а студенты-афроамериканцы превзошли тех студентов китайского происхождения, которые не посещали семинары (Treisman, 1992).

Это не единственный вывод. Результаты исследований свидетельствуют: совместная работа (дающая возможность увидеть и понять математические связи) обеспечивает справедливые результаты (Boaler & Staples, 2005).

5. Оказывайте девочкам и представителям меньшинств дополнительную поддержку в изучении математики и естественных наук

Многие учителя начальной школы испытывают чувство тревоги в связи с математикой: им самим внушали устойчивые стереотипы в отношении этого предмета и их потенциала. Во время своего онлайн-курса для учителей я объясняла, что математика — многоплановая дисциплина, которую может освоить каждый. И многие учителя начальной школы, которые прошли этот курс, говорили, что это изменило их жизнь и с тех пор они иначе воспринимают математику. В Великобритании около 85% учителей начальной школы — женщины; в связи с этим Шин Бейлок, Элизабет Гундерсон, Герардо Рамирес и Сьюзен Ливайн обнаружили нечто важное и интересное (Beilock, Gunderson, Ramirez, & Levine, 2009): уровень тревоги, которую испытывали учителя начальной школы из числа женщин, определял уровень успеваемости девочек из их классов, но не мальчиков (Beilock et al., 2009). Девочки более уважительно относятся к учительницам и отождествляют себя с ними, а те, как ни печально, часто транслируют мысль, что математика — трудный предмет для девочек. Многие учителя пытаются успокаивать девочек и выражать им сочувствие, убеждая, что они смогут справиться с другими предметами. Теперь мы знаем, что такой подход губителен. Исследователи обнаружили, что, когда матери говорили дочерям «Я не справлялась с математикой в школе», уровень успеваемости девочек *сразу* падал (Eccles & Jacobs, 1986). Учителям необходимо заменить фразы, выражающие сочувствие (например, «Ничего, значит, математика — это не твое»), позитивными высказываниями: «Ты можешь сделать это, я верю в тебя, главное в математике — упорство».

Помимо справедливых стратегий преподавания (таких, как совместная работа и подходы, основанные на исследованиях), девочкам и цветным ученикам необходимо давать вдумчивые и позитивные сигналы по поводу значимости их места в математике. Ряд научных исследований по теме угрозы подтверждения стереотипа, самым важным из которых стало исследование Клода Стила, однозначно указывает на то, что стереотипы вредны. Стил и его коллеги продемонстрировали: когда девочкам сообщали о проведении теста по математике для определения гендерных различий, они получали низкие результаты, а девочки, не имевшие такой информации, выполняли этот тест на том же уровне, что и мальчики. Затем обнаружилось, что подавать сигнал о низкой успеваемости по

гендерным причинам даже нет необходимости: женщины показывали более низкие результаты даже тогда, когда перед прохождением теста отмечали пол в соответствующей графе, в отличие от женщин, которым не приходилось ставить такую отметку. В ходе этого и многих других исследований Стил продемонстрировал, что стереотипы «витают в воздухе» и ограничивают возможности людей. В дальнейших экспериментах он показал такое же влияние стереотипов на белых мужчин, играющих в гольф с афроамериканцами: белые мужчины считали, что не обладают такими «естественными» способностями к спорту. Когда белым игрокам в гольф сообщали о расовых различиях до начала матча, они показывали более низкие результаты. Работа Стила и его коллег продемонстрировала, что любая социальная группа подвержена угрозе подтверждения стереотипа, если она работает в той области, в которой считается более успешной (Steele, 2011).

К сожалению, на уроках математики очень сильны стереотипы о том, что происхождение и пол имеют значение. Поэтому крайне важно бороться с ними, и один из способов сделать это — заострить внимание на достижениях женщин и представителей нацменьшинств в математике и других технических дисциплинах.

> В Балтиморе есть женский клуб робототехники, в котором занимаются только девочки-афроамериканки. У клуба целая полка наград за создание дистанционно управляемых роботов, которых они сами придумали и сконструировали.
>
> Участницы клуба RoboDoves добились таких успехов, что о них написали в журнале Scientific American. Девочки соревнуются с клубами робототехники других старших школ и демонстрируют при этом дух соперничества в сочетании с любовью к математике и другим дисциплинами STEM, а также изобретательность и конструктивные решения, которые могут вдохновить многих других учеников. Статьи об этом клубе робототехники можно использовать в качестве источника информации (см. Lee, 2014; Zaleski, 2014).

Найдите и другие возможности подбодрить учеников, которым необходима дополнительная поддержка. На второй год преподавания в лондонской общеобразовательной школе я начала проводить в этой школе праздники в честь Международного женского дня. Мы устраивали математические семинары для девочек, во время которых работали над интересными задачами и

вспоминали знаменитых женщин-математиков. В то время я преподавала в Хаверсток — средней школе Центрального Лондона, в которой отмечался высокий уровень культурного многообразия и ученики которой разговаривали на 40 языках. Такие праздники помогали многим тихим ученицам (особенно индийского происхождения) обрести уверенность в себе и более активно заниматься математикой. Повышенная социальная вовлеченность этих девочек сохранялась во время уроков математики и позже.

Есть и другие способы поощрения девочек и представителей национальных меньшинств к работе над математикой. Но суть проста: для обеспечения равенства учителю порой недостаточно обращаться со всеми учениками одинаково. Некоторые сталкиваются с дополнительными препятствиями, поэтому мы должны намеренно уделять им больше внимания, если хотим создать более справедливое общество.

6. Отмените домашние задания или хотя бы измените их характер

Группа международной программы по оценке образовательных достижений учащихся PISA, в распоряжении которой есть данные о 13 миллионах учащихся, недавно сделала важное заявление. Изучив зависимость между домашними заданиями, уровнем успеваемости и равенством, члены группы сказали, что домашняя работа укрепляет неравенство в сфере образования (Program for International Student Assessment [PISA], 2015). Кроме того, они усомнились в том, что домашние задания имеют академическую ценность: научные исследования неизменно показывали, что те либо дают негативный эффект, либо вообще не влияют на успеваемость. Например, исследователи Дэвид Бейкер и Жеральд Летандр сравнили результаты учеников разных стран по стандартизированным тестам по математике и не увидели никакой положительной корреляции между количеством домашних заданий и успеваемостью по математике (Baker, LeTendre, 2005). В ходе еще одного исследования было обнаружено, что в странах, где ученикам дают больше домашних заданий по математике, ниже результаты тестов, чем в странах с меньшим количеством домашних заданий (Mikki, 2006). Анастасия Китсантас, Йеханзеб Чима и Герберт Уэр проанализировали данные о пяти тысячах учеников в возрасте 15–16 лет с разным уровнем доходов и разной этнической принадлежностью и также пришли к выводу: чем больше времени подростки тратят на домашнюю работу по математике, тем ниже успеваемость по этому предмету у

представителей всех этнических групп (Kitsantas, Cheema, Ware, 2011).

Легко понять, почему домашняя работа усиливает неравенство: у учеников из менее благополучных семей редко есть тихое место, где можно заниматься; они часто выполняют домашние задания по вечерам — либо дома, пока родители на работе, либо на своей работе. Кроме того, у них реже дома есть книги или интернет. Давая ученикам домашнюю работу, мы создаем препятствия именно тем, кто больше всего нуждается в поддержке. На мой взгляд, даже в силу одного этого факта домашняя работа неприемлема.

Я вижу, какой стресс вызывает у моих дочерей домашняя работа по вечерам на протяжении недели, когда у них не остается времени для игр и общения с родными. И у меня есть личные претензии к домашним заданиям. На прошлой неделе, во время двухчасового окна, которое и представляет собой весь наш вечер, моя восьмилетняя дочь сказала мне: «Я не хочу это делать, я хочу посидеть с тобой и поиграть». Я не знала, что ей сказать, и предложила: «Давай я напишу твоей учительнице письмо и сообщу, что сегодня вечером ты не будешь делать домашнее задание». Насколько обоснованна просьба восьмилетнего ребенка о том, чтобы провести вечер с семьей? Мы с мужем много работаем; мы не видим детей до 17:30, и нам еще нужно приготовить ужин. К тому времени, когда мы садимся за стол, остается один-два часа до отхода ко сну. Это время редко тратится на общение или игры, ведь детям каждый день нужно делать домашние задания. Часто они очень устают, и задачи кажутся им слишком трудными. Несправедливо и неразумно давать ученикам сложные задачи в конце дня, когда они устали, а порой и истощены. Возможно, учителя, которые дают задание на дом, считают, что во второй половине дня у детей есть время на выполнение заданий в присутствии любящих неработающих родителей? Если нет, то я не понимаю, почему они считают, что могут диктовать, как детям проводить вечера.

Помимо неравенства, которое создает домашняя работа, стресса, который она порождает (Conner, Pope, & Galloway, 2009; Galloway & Pope, 2007), потери семейного времени и нулевого или негативного влияния на успеваемость (PISA, 2015), чаще всего качество домашней работы по математике в лучшем случае низкое. За все годы учебы моей старшей дочери в начальной школе я редко видела задания, которые помогали ей понять математику; зато я часто видела, как они вызывают у нее стресс. Почему-то учителя математики (и их учебники) как будто оставляют самые формальные и неинтересные задания по

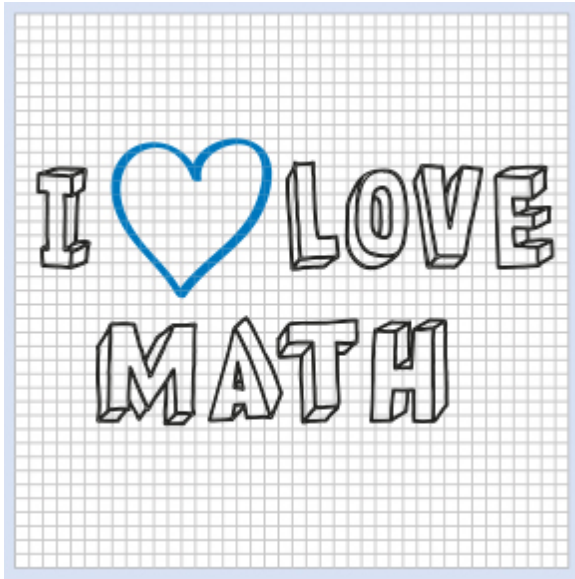
математике для домашней работы. Моя дочь должна была учить наизусть таблицу умножения, решать по 40 задач на одну и ту же тему и искать ответы на множество вопросов, на которые она научилась отвечать правильно еще на уроке. Домашние задания, которые дают ученикам в США, бессмысленны и при этом вредны.

Если урок начинается с проверки домашнего задания, это еще больше усиливает неравенство: ведь некоторые ученики начинают каждый день с отставания от других. Когда я впервые приехала в Америку, меня шокировало то, что на уроках проверка домашней работы занимает 20–30 минут и домашняя работа по каждому предмету в средних и старших классах там дается на каждый вечер. В Англии другой подход к домашним заданиям: учителя дают домашнюю работу раз в неделю. Когда я училась в школе, у меня каждый вечер было, как правило, домашнее задание только по одному предмету, которое в старших классах занимало около часа. В США, по крайней мере в нашем школьном округе, старшеклассники постоянно засиживаются до двух часов ночи за домашней работой. По имеющимся данным, уровень стресса у них очень высокий, а домашняя работа — один из факторов, порождающих его. А в Великобритании ученикам задают гораздо меньше домашней работы — и, видимо, поэтому домашние задания британских школьников получают там меньше внимания и порождают меньше стресса.

Если вы как учитель или директор школы хотите обеспечить равенство и отменить домашнюю работу, есть много материалов с результатами исследований, которые вам в этом помогут, в том числе книга Элфи Кона «Аргументы против домашней работы», книга Салмана Хана «Весь мир — школа», а также множество ресурсов Challenge Success (например, Challenge Success, 2012).

Если вам нужно сохранить домашние задания, рекомендую изменить их характер: вместо того чтобы ставить ученикам вопросы, на которые они должны отвечать с ориентацией на результат, давайте им вопросы для размышлений, стимулирующие анализировать математические концепции, о которых они узнали на уроке, и фокусироваться на интересных идеях, что, как мы знаем, помогает добиться больших успехов в учебе (PISA, 2012). В примере 6.1 представлен пример такого домашнего задания.

ПРИМЕР 6.1. ДОМАШНЯЯ РАБОТА. МОИ РАЗМЫШЛЕНИЯ



Какую основную идею вы узнали сегодня?

С чем у вас возникли трудности или по поводу чего у вас есть вопросы?

Как идеи, которые вы узнали на уроке сегодня, можно применить в жизни?

Домашнюю работу можно использовать и как способ вовлечь учеников в исследовательские проекты — например, найти примеры чисел Фибоначчи в доме или на улице. Ее следует давать только тогда, когда для этого есть основания и когда это открывает возможности для размышлений и активных исследований. Благодаря такому подходу мы могли бы избавить учеников от многих часов бездумной практики каждый день и дать миллионам детей возможность более продуктивно использовать свое время, снизить уровень стресса и сделать гигантский шаг в плане содействия формированию более справедливых школ.

Резюме

Справедливые стратегии, которые я предложила во второй части этой главы (изменение установок о том, кто может заниматься математикой; создание более широких возможностей для исследований; отмена, сокращение или изменение характера домашних заданий и стимулирование групповой работы), — не совсем обычные стратегии, которые рекомендуют учителям, когда

речь заходит о неравенстве в областях STEM. Выступая недавно в Белом доме перед комиссией по вопросам женщин и девушек, я заявила, что преподавание часто не учитывают во время дискуссий по поводу обеспечения равенства. В организациях думают о примерах для подражания и порой осознают важность мышления, но редко учитывают, какую огромную роль играет преподавание и его методы, о которых я говорила выше. Учителя могут изменить к лучшему жизнь учеников, которые столкнулись с препятствиями и неравенством. Достаточно представлять математику должным образом и использовать все возможности, чтобы поддержать социально незащищенных учеников. Математика — дисциплина, которая очень важна для будущего и необходимое условие для поступления в колледж и работы во многих областях. Соответственно, на учителей математики возложена дополнительная обязанность сделать ее равно доступной для всех учеников (и у них есть такая возможность). Многие придерживаются элитистского подхода к математике, но учителя (и родители) могут отказаться от него и открыть перед учениками другой путь, который начинается с позитивных сигналов об успехе и ценности труда. И его обеспечат справедливые стратегии преподавания, дающие всем возможность добиться успеха.

Глава 7. От деления по уровню успеваемости к делению с ориентацией на мышление роста

Возможности для обучения

Я до сих пор хорошо помню свой первый урок математики в качестве учителя. Это было в школе Хаверсток в лондонском районе Кэмден-Таун (о ней шла речь в главе 6). Когда я начала там работать, в преподавании математики использовалась система деления учеников на группы по уровню успеваемости. Дети учились вместе до девятого класса, а потом их зачисляли в одну из четырех групп. В тот день я пришла на свой первый урок, воодушевленная возможностью объяснять математику девятиклассникам, вооружившись научными знаниями об эффективном преподавании. Но моих учеников только что зачислили в группу самого низкого уровня. Я поприветствовала их, а они мне сказали: «А смысл?» Я целый год старалась подавать им вдохновляющие сигналы и использовала методы, которым научилась во время профессиональной подготовки, но их путь был предопределен заранее и я мало что могла изменить. Я добилась отмены деления учеников на группы по уровню успеваемости; с тех пор эта школа дает всем ученикам возможность изучать математику высшего уровня.

Один из главных факторов успеваемости учеников — «возможности обучения». Если у детей есть доступ к сложному материалу, они добиваются лучших результатов. Это неудивительно, удивляет другое: все мы знаем, что возможность учиться — самое важное условие (Wang, 1998; Elmore & Fuhrman, 1995), но миллионы учеников лишены возможности осваивать материал, который им нужен и который они потянули бы, поскольку их зачисляют в классы более низкого уровня, порой с самого раннего возраста. Я была потрясена полученными в Англии статистическими данными: 88% учеников, которых распределили по группам в возрасте четырех лет, остались там же на протяжении всего периода учебы в школе (Dixon, 2002). Тот факт, что будущее детей определяют за них, когда им всего четыре года или даже четырнадцать лет, губительно сказывается на работе учителей и школ и противоречит результатам фундаментальных исследований по теме развития и обучения.

Дети развиваются разными темпами и в разное время; на разных этапах у них проявляются разные интересы, сильные стороны и склонности. Мы не можем знать, какими способностями будет обладать ребенок в четыре года или четырнадцать лет, поэтому стоит создать среду, в которой они могут осваивать материал высокого уровня и которая будет подпитывать их интересы, а учителя готовы в любой момент распознать, взрастить и развить их потенциал. Новые научные данные о невероятной способности головного мозга расти и меняться, наряду с данными о важности представлений учеников о собственном потенциале, подтверждают необходимость выхода за рамки устаревших систем деления на группы по уровню знаний (сформировавшихся в те времена, когда у нас было меньше информации), которые ограничивают достижения учеников, каким бы ни был их уровень успеваемости раньше.

Однажды я выступала перед более чем 800 учителями математики и руководителями школ и задала им такой вопрос: «Какие методы, которые используются в школах в настоящее время, способствуют формированию фиксированного мышления?» Все записали свои ответы на листах бумаги, и я их собрала. В записках часто упоминались методы обучения, о которых идет речь в данной книге (особенно оценка уровня знаний и система оценок, подробнее см. главу 8), но был и явный лидер: деление на группы по способностям. Я согласна с этим. Нет более сильного сигнала о фиксированном мышлении, чем навешивание ярлыков. Такой сильный сигнал негативно сказывается на всех учениках, в какую бы группу они ни попали (Boaler, 1997; Boaler, 2013a; Boaler & Wiliam, 2001; Boaler, Wiliam, & Brown, 2001). Карисса Ромеро (докторант, которая работала вместе с Кэрол Дуэк, а затем стала руководителем одного из отделений Стэнфордского университета) пришла к выводу, что сигналы о фиксированном мышлении, которые получают ученики при делении на группы по уровню успеваемости, наиболее негативно сказываются на детях, которые попадают в группы высшего уровня (Romero, 2013).

Отказ от деления учеников на группы по уровню успеваемости

Во многих школах США учеников зачисляют в группы по изучению математики, сформированные по принципу успеваемости, начиная с седьмого класса. Создаются отдельные классы, в которых подросткам преподают материал соответствующего уровня. Международные аналитики,

изучающие уровень знаний по математике в разных странах, пришли к важному выводу: самых больших успехов добились те страны, в которых меньше всего делят учеников на группы по способностям. Например, в ходе третьего международного исследования по математике и естественно-научным дисциплинам было обнаружено, что в США имеет место самый высокий разброс успеваемости учеников — иными словами, самый высокий уровень разделения на группы по способностям. Страной с самым высоким уровнем успеваемости стала Южная Корея; там реже использовалось деление на группы и успеваемость распределялась наиболее равномерно. В США была также обнаружена самая сильная корреляция между уровнем успеваемости и социально-экономическим статусом. Этот результат был отнесен на счет деления учеников на группы (Beaton & O'Dwyer, 2002). Самый высокий в мире уровень знаний по математике отмечен в таких разных странах, как Финляндия и Китай, причем в обеих отказываются от деления на группы по способностям и преподают сложные дисциплины всем. В объединенном школьном округе Сан-Франциско, одном из крупнейших школьных округов Калифорнии, было решено отказаться от всех форм деления на группы и отменить углубленные курсы до десятого класса. Вплоть до перехода в десятый класс учеников стимулируют изучать математику на как можно более высоком уровне. До этого момента все могут осваивать анализ, а в дальнейшем у всех детей есть доступ ко всем углубленным курсам. Это исключительный случай, и он заслуживает восхищения. Внимательно изучив результаты научных исследований, школьный совет единогласно утвердил предложение об отмене устаревших форм деления на группы. В большинстве школьных округов учеников распределяют по группам в гораздо более раннем возрасте. В округе, расположенном в весьма успешном районе неподалеку от Стэнфорда, половину детей зачисляют в группы низкого уровня, когда они переходят в седьмой класс, лишая их возможности в дальнейшем изучать анализ. Именно в этот момент родители должны услышать тягостный звук: хлопок двери в будущее для их детей. Если мы хотим начать новую эпоху, в которой все стремятся изучать математику высокого уровня, необходимо перейти к более гибким методам деления на группы, основанным на результатах научных исследований (о них пойдет речь ниже).

Учителям трудно давать всем ученикам задания, соответствующие уровню каждого, но они знают золотую середину, позволяющую добиться поразительной вовлеченности всего класса: когда задания достаточно сложны для детей, но не

выходят за рамки их возможностей. На первый взгляд кажется, что сделать это легче, если разделить учеников на группы по уровню успеваемости. Но в этом случае ученики показывают более низкие результаты, поскольку даже в таких группах у детей разные интересы и разная подготовка. Однако учителя продолжают считать всех учеников одинаковыми и выбирают узкие задания, состоящие из коротких вопросов — слишком легкие для одних и слишком трудные для других. Именно поэтому постановка задач категории «низкий пол, высокий потолок» на уроках математики так важна для будущего. Другая, более очевидная причина того, что деление учеников на группы снижает успеваемость, — сигнал о фиксированном мышлении, который оно подает всем ученикам.

Исследования показывают, что происходит, когда школы решают отказаться от деления на группы по уровню успеваемости. Одна важная работа продемонстрировала последствия отказа от такого деления в школьном округе Нью-Йорка. В прошлом ученики средних школ Нью-Йорка занимались в обычных классах и классах с углубленным изучением математики. Затем в округе приняли решение отменить специализированные классы и преподавать всем математику высшего уровня сложности. Исследователям удалось отслеживать успеваемость учеников на протяжении трех лет занятий в классах, сформированных по принципу успеваемости, а затем трех лет обучения в смешанных классах. Они изучали учеников шести возрастных групп вплоть до окончания старшей школы. Было установлено, что те, кто изучал математику более высокого уровня в общих классах, получали больше удовольствия от нее и сдали тест штата Нью-Йорк *на год раньше*, чем ученики, которые были поделены на группы по принципу успеваемости. Вдобавок оказалось, что отказ от такого деления полезен ученикам с разными уровнями успеваемости (Burris, Heubert, & Levin, 2006). Эти выводы подтверждают многие другие исследования (см., например, Boaler, 2013b). Результаты многих работ указывают на негативное влияние деления на группы по уровню успеваемости, но эта практика до сих пор существует в большинстве школ США. Ниже я расскажу, как во время занятий можно использовать современные и эффективные методы деления учеников на группы, обеспечивающие всем возможность учиться и развивать мышление роста.

Деление на группы с ориентацией на мышление роста

Джилл Баршей — журналист Hechinger Post. Ее популярная колонка «Образование в цифрах» публикуется раз в неделю в U.S. News & World Report. После того как Джилл прочла мою книгу «При чем тут математика?» и прошла онлайн-курс для учителей, у нее появилось желание преподавать математику. Она стала учителем алгебры в девятом классе чартерной школы в Бруклине. Но она не знала, с какими учениками ей предстоит столкнуться: деморализованными, которые, по сути, поставили крест и на математике, и на себе, поскольку их не зачислили на курс алгебры в восьмом классе. Дети заявили Джилл, что они не «умники», и весь год вели себя очень плохо. К сожалению, это одно из следствий деления учеников на группы по успеваемости. В большинстве своем плохо ведут себя ученики, которые не верят, что могут добиться успеха. Учителя беспокоятся, что в общих группах ученики с плохим поведением будут оказывать негативное влияние на остальных. Однако дети ведут себя плохо только тогда, когда им внушают мысль, что они не смогут ничего добиться. Как можно их за это винить? За все годы преподавания в разношерстных группах учеников я пришла к выводу, что, когда дети начинают верить в себя и понимают, что я верю в них, плохое поведение и отсутствие мотивации сходят на нет.

Я много лет работала в замечательной средней школе, которая демонстрирует твердую приверженность преподаванию, ориентированному на мышление роста, и в которой всегда разделяли учеников на группы по смешанному принципу. Несколько лет назад в ней начали ощущать давление со стороны родителей, которые требовали математических классов, чтобы их дети могли перейти в старшую школу, заранее изучив геометрию. В итоге школа сдалась, и в ней появились обычные классы и классы с углубленным изучением математики. Это изменение оказалось катастрофичным: множество учеников разных уровней потеряли интерес к математике. У учеников с одинаковым уровнем успеваемости, зачисленных в разные группы, возникли серьезные проблемы, у многих сформировалась установка на данность в отношении своих способностей. Кроме того, многие ученики, которые попали в классы с углубленным изучением математики, стали испытывать неприязнь к этому предмету и предпочли уйти оттуда, что нанесло им еще больший вред. Через два года школа отказалась от деления учеников по успеваемости и вернулась к смешанным группам. Сейчас она предлагает всем желающим курс геометрии в качестве факультатива, проводимого до начала уроков. Эта превосходная стратегия позволяет справиться с давлением родителей, предоставляя возможность выбора тем, кто хочет пройти углубленный курс математики, но

не подавая ученикам губительных сигналов об их потенциале, формирующих фиксированное мышление.

Учителя, которые хотят дать всем ученикам возможность освоить материал высшего уровня, но вынуждены проводить уроки в классах, сформированных по принципу успеваемости, порой дают сложные задания. Им хорошо известно, что деление по уровню успеваемости ограничивает достижения учеников. Кроме того, они знают, что при наличии правильных сигналов и грамотного преподавания ученики классов низшего уровня способны выполнять более сложные задания.

В еще одной замечательной городской школе, где придерживаются подхода, ориентированного на мышление роста, учителя отказались от формирования классов по принципу успеваемости и ввели дополнительные занятия для слабых учеников. Их могут посещать все дети, которым необходимо чуть больше времени для изучения материала. Дополнительные занятия проводятся после обычных уроков математики, включенных в расписание, и не посвящены работе над ошибками. Ученики могут вернуться к материалу занятий обычной школьной программы и обсудить его, более тщательно проанализировав математические концепции, которые рассматривались на уроке. Приходят и те, кому математика дается с трудом, и те, что справляются с ней, но стремятся глубже изучать этот предмет. Название курса не подразумевает, что он предназначен только для учеников с низкой успеваемостью.

Учителя, которые стремятся создать новое будущее (где всем свойственно мышление роста и у всех есть благоприятные возможности) и предпочитают работать в смешанных классах, достойны восхищения. Но обучение групп с широким диапазоном успеваемости требует компетентного подхода. В таких группах не получится объяснять узкие математические темы, которые смогут понять немногие. Ниже я расскажу о ряде важных стратегий эффективного преподавания в разнородных группах, которые опираются на результаты научных исследований.

Эффективное преподавание в смешанных группах: задачи по математике

При отказе от разделения на группы по уровню успеваемости на уроках математики очень важно обеспечить возможность изучать математику на разных уровнях, а также не ставить закрытые вопросы, подходящие для немногих. Есть разные способы стимулировать изучение математики на разных уровнях.

1. Постановка открытых задач

Как было сказано в главе 5, если ученикам, входящим в состав разнородной группы, ставить закрытые вопросы, многие из них не смогут дать ответ или проявить себя. Поэтому крайне важно ставить открытые задачи из категории «низкий пол, высокий потолок». Они позволяют всем усвоить соответствующие математические концепции и поднять их понимание на очень высокий уровень. К счастью, задачи категории «низкий пол, высокий потолок» относятся также к числу самых увлекательных, имеющих большую ценность и помимо того, что они рассчитаны на детей с разными уровнями успеваемости. Они знакомят учеников с важными математическими концепциями, которые пробуждают у них интерес и стимулируют творческий подход. В главе 5 приведен ряд примеров таких задач, а также ссылки на сайты, на которых можно найти их описание.

Учителя успешной английской школы Феникс-Парк, использующей проектно-ориентированный подход, подобрали ряд задач категории «низкий пол, высокий потолок», которые могли решать все дети. Некоторые решали их успешно в одни дни, а другие — в другие дни. Было невозможно предвидеть, какие ученики будут решать задачи на каком уровне в конкретный день. В главе 5 приведен пример задачи о максимальной площади, которую можно огородить забором; благодаря ей одни ученики узнали о тригонометрии, другие — о теореме Пифагора, а третьи — о фигурах и площади. Роль учителя во время уроков сводилась к обсуждению заданий, над которыми работали ученики, а также к тому, чтобы направлять детей и расширять их мышление. Во время обычного урока эту роль выполняет учебник, темы и задачи по математике, которые в нем представлены. Но это грубый инструмент, который не способен определить, что знает ученик или что ему нужно знать. Во время уроков, ориентированных на *мышление роста*, именно учитель принимает решения, которые касаются отдельных детей или групп и направлены на то, чтобы дать ученикам возможность проявить себя, поддержать их и помочь им выйти за привычные рамки на своем уровне. При работе над открытыми задачами учителя могут взаимодействовать с учениками, знакомить их с математическими концепциями и обсуждать важные вопросы. Потому-то в такой среде ученики добиваются больших успехов. Этот подход требует от учителей серьезного напряжения, но приносит им огромное удовлетворение, особенно когда они видят, как дети, которым раньше не хватало уверенности в себе и у которых была низкая успеваемость, взлетают и стремительно

набирают высоту.

Несколько лет назад в Англии я работала с группой учителей, которые решили отказаться от деления на группы по уровню успеваемости в старших классах, когда узнали о методе комплексного обучения, описание которого приведено ниже. У них не было ни специальной подготовки, ни такой замечательной программы, как в школе Феникс-Парк, но они узнали о комплексном обучении и подобрали ряд задач категории «низкий пол, высокий потолок». В конце первой недели преподавания в новых классах, сформированных с ориентацией на мышление роста, один учитель с удивлением обнаружил, что первым задачу решил ученик, который раньше был в группе самого низкого уровня. И позже этих учителей приятно удивляло то, что ученики с разными уровнями успеваемости используют творческие методы решения задач. Они были в восторге от того, насколько хорошо ученики отреагировали на отказ от деления на группы по успеваемости. Вдобавок и проблемы с дисциплиной, обострения которых они опасались, исчезли. Мне было интересно узнать об этом, поскольку эти учителя выражали обеспокоенность по поводу отказа от формирования групп по успеваемости и по поводу того, смогут ли дети работать вместе. Учителя обнаружили, что, когда они дают открытые задачи, все ученики проявляют к ним интерес, стараются проявить себя и получают необходимую поддержку. Со временем ученики, которых раньше считали слабыми, повысили свой уровень. При этом класс не делился на «способных» и «неспособных». Он состоял из увлеченных детей, которые учатся вместе и помогают друг другу.

2. Предоставление возможности выбирать задачи

Ученикам, которые занимаются в классах, ориентированных на мышление роста, не всегда нужно работать над одними и теми же задачами. Им можно предложить разные задания разных уровней и из разных областей. Важно, чтобы сами ученики могли выбирать задачу, над которой хотят работать, а не учителя. Однажды во время урока в школе Феникс-Парк, на котором я присутствовала, ученикам предложили выбрать одну из двух задач: найти фигуры, площадь которых составляет 64 единицы; найти фигуры, объем которых составляет 216 единиц. В четвертом классе я видела, как учитель предлагает ученикам использовать дробные полоски или палочки Кюизенера, для того чтобы найти как можно больше дробей, эквивалентных $^1/_4$, а в качестве дополнительного, более трудного задания — найти дроби, эквивалентные $^2/_3$. Расширенные задания и различные задачи с дополнительными вопросами — это и есть то, что можно

(и, пожалуй, целесообразно) делать на каждом уроке. Все ученики должны иметь возможность выбора или решения более сложных и интересных задач.

Порой некоторых учеников необходимо подталкивать к тому, чтобы они взялись за решение предложенной на уроке задачи повышенной сложности. При постановке задач важно, чтобы у учеников не возникала мысль, будто они могут работать только над простой задачей или учитель не считает их способными решить что-то более сложное. Наблюдая, как эту стратегию применяют разные учителя, я видела, как они сообщают ученикам информацию о том, что задачи охватывают разные темы или некоторые из них особенно сложны. Ученики счастливы, когда у них есть возможность решать, над чем они хотят работать и когда им предлагают дополнительные, более сложные и интересные задачи.

3. Индивидуальные пути обучения

В период преподавания в смешанных группах школы Хаверсток я использовала курс математики, который специально разработан для групп с разной успеваемостью, сформированных в городских школах. Он получил название SMILE, или Secondary Mathematics Individualized Learning Experience («Практика индивидуального обучения математике в средней школе»)[17]. Лондон — удивительный город, который отличается большим разнообразием и высоким уровнем текучести учеников. Учителя, которые работают в школах Центрального Лондона, знают, что у них в один день может быть одна группа учеников, а на следующий день состав группы может измениться, поскольку некоторые ученики уходят из класса, а другие присоединяются к нему. Многие учителя из центральных районов Лондона придерживались принципа формирования разнородных групп, в состав которых входят дети с разными уровнями успеваемости. В отличие от традиционных учебных программ, курс SMILE представлял собой комплект карточек (листов бумаги стандартного размера), которые составляли учителя, пытаясь сделать их как можно более увлекательными и учитывающими культурные особенности. Курс включает тысячи карточек, каждая из которых посвящена отдельной теме. Любой учитель из центральных районов Лондона мог предложить свою карточку; со временем комплект разросся до трех тысяч интересных карточек, составленных учителями. Учителя, преподававшие курс SMILE, выдавали каждому ребенку 10 карточек, которые тот должен был проработать и показать преподавателю, после чего получал еще 10 карточек. Карточки предоставлялись каждому ученику в

отдельности, но на многих предлагалось найти партнера для совместной работы над соответствующими математическими концепциями.

Поскольку карточки подбирались индивидуально, ученики могли работать с ними в удобном темпе, а учителя ходили по классу и помогали им. Я сама преподавала курс SMILE и видела очень увлеченных детей, которые с воодушевлением собирали карточки, зная, что их успех зависит от них самих. Иногда мы не работали с карточками, а всем классом проводили математические исследования. Курс SMILE был весьма эффективен в городских школах со смешанными классами, поскольку предусматривал возможность индивидуальной работы, а отсутствие кого-то из учеников не создавало проблем в классе. Многие карточки SMILE превосходны, но порой их необходимо адаптировать к местным условиям, поскольку они рассчитаны на лондонских учеников и содержат много примеров, касающихся Лондона.

Развитие технологий привело к тому, что индивидуальный подход к обучению математике получил более широкое распространение. Основатель Khan Academy Сал Хан — знаменитый приверженец индивидуального обучения. Он справедливо подчеркивает примитивность деления на группы по успеваемости и показывает, как ученики, которым дается возможность самим выбирать материал и путь обучения, добиваются гораздо больших успехов, независимо от начального уровня (Khan, 2012). Другие компании, работающие на основе современных технологий, также создали продукты, позволяющие ученикам заниматься на своем уровне. Однако, как ни печально, я еще не встречала такой продукт для индивидуальной работы, который обеспечит эффективное обучение математике. Но сам принцип предоставления ученикам возможности формировать свой путь обучения и получать индивидуальный материал в сочетании с условиями для групповой работы и сотрудничества позволяет предлагать задания высокого уровня всем ученикам.

Эффективное преподавание в смешанных группах: комплексное обучение

Задачи по математике, которые используются в смешанных группах, очень важны. Но не менее важны и правила, и ожидания в отношении того, как ученики должны работать вместе. Опытные учителя знают, что групповая работа на уроках может закончиться неудачей, если ученики принимают в ней

неравноценное участие. Если дети предоставлены себе и их никто не стимулирует к формированию эффективных правил работы в группе, скорее всего, произойдет вот что: некоторые возьмут на себя большую часть работы, другие будут сидеть сложа руки, а кого-то вообще могут не допустить к работе, потому что они не имеют авторитета в глазах других. Социолог Стэнфордского университета Элизабет Коэн проанализировала закономерности неравного участия в групповой работе во время уроков и пришла к выводу, что это связано с социальными различиями между членами группы: некоторым ученикам присваивают или они сами принимают статус важных участников группы, а на других навешивают ярлык низкого статуса (Cohen, 1994). Моя коллега из Стэнфорда Дженнифер Лэнгер-Осуна изучила много примеров групповой работы, в которых основанием для рассмотрения идей был воспринимаемый статус ученика, который их выдвигает, а не математическое содержание (Engle, Langer-Osuna, & McKinney de Royston, 2014). Она пришла к выводу, что различия в статусе часто обусловлены стереотипными установками в отношении учеников определенной расы, социального положения или пола (Esmonde & Langer-Osuna, 2013; Langer-Osuna, 2011). Лиз Коэн и Рейчел Лотан разработали комплексный педагогический подход, направленный на обеспечение равенства в процессе групповой работы. Его можно использовать в любом классе и в преподавании любого школьного предмета (Cohen & Lotan, 2014).

В ходе четырехлетнего научного исследования, которое финансировал Национальный научный фонд, я сравнила разные подходы к преподаванию математики. Вместе с командой своих студентов я отслеживала успехи более 700 учеников разных старших школ (Boaler, 2008; Boaler & Staples, 2005). Примерно половину участников составляли ученики школ, в которых классы формировались по принципу успеваемости, преподавание математики носило формальный характер, а уровень знаний оценивался с помощью тестов. Другая половина участников — ученики городской школы в Калифорнии, которую я назвала Рейлсайд. В ней учителя отказались от деления учеников на группы по уровню успеваемости и преподавали математику в рамках комплексного подхода. Состав учеников этой школы был очень разнородным; в ней было больше учеников, изучающих английский язык, и более высокий уровень культурного многообразия, чем в любой другой школе. В Рейлсайд было примерно 38% учеников-латиноамериканцев, 23% афроамериканцев, 20% белых, 16% учеников азиатского происхождения и выходцев с тихоокеанских островов, 3% представителей других групп. В начале нашего исследования,

когда ученики только окончили среднюю школу, мы организовали оценку уровня знаний по математике за прошедший период. В то время успеваемость учеников Рейлсайд была гораздо ниже по сравнению с другими городскими школами, принимавшими участие в исследовании, что не так уж нетипично для городской среды, в которой ученикам приходится решать много жизненных проблем (рис. 7.1).

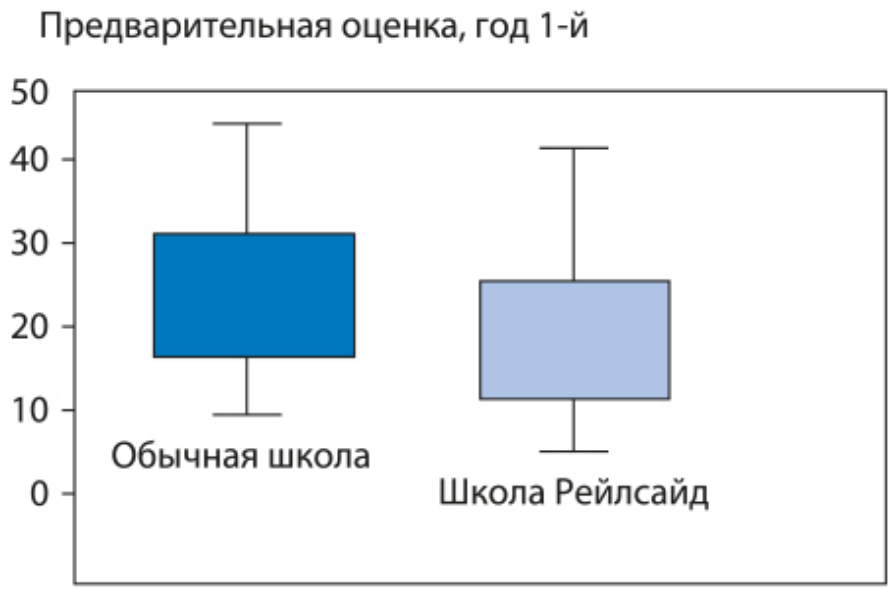


Рис. 7.1. Результаты предварительной оценки уровня знаний

Через год ученики Рейлсайд догнали тех, которые учились традиционным способом (рис. 7.2). Через два года их уровень успеваемости стал гораздо выше (рис. 7.3).

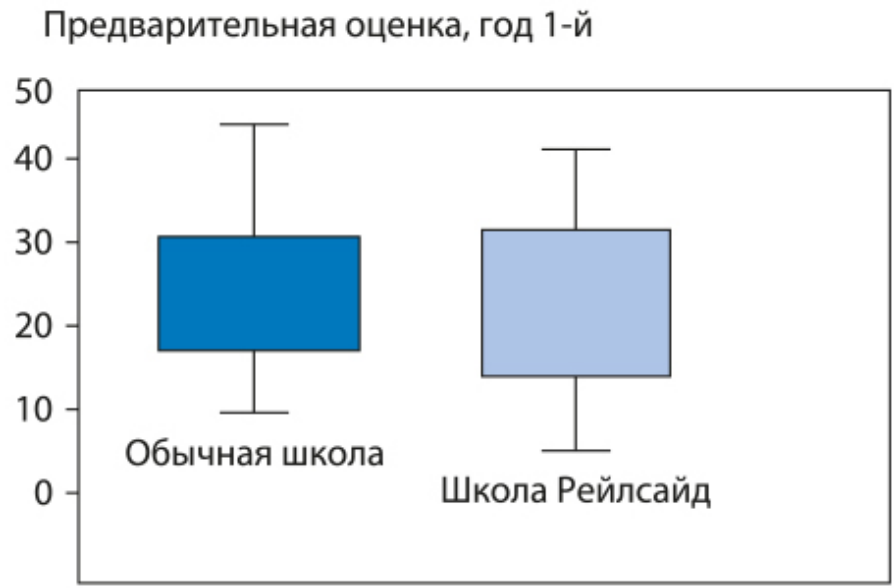


Рис. 7.2. Результаты оценки уровня знаний, год 1-й

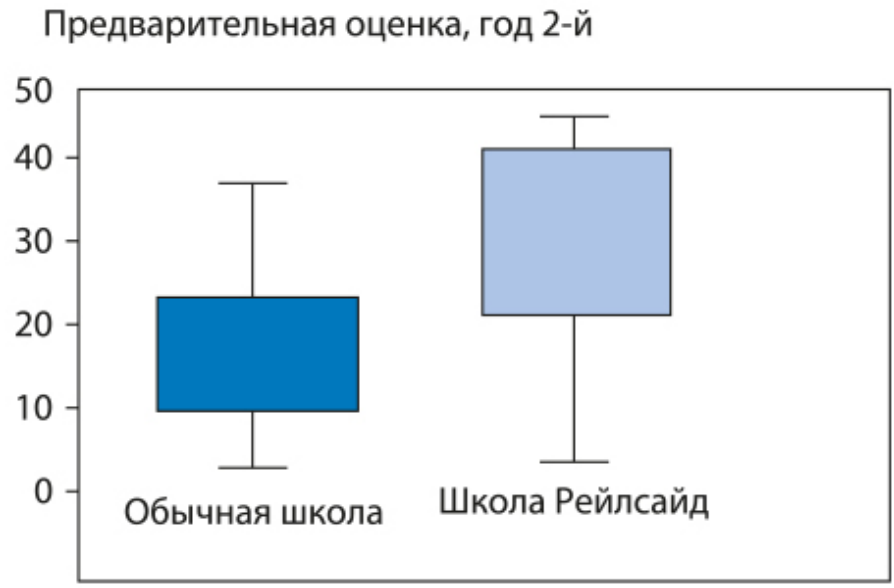


Рис. 7.3. Результаты оценки уровня знаний, год 2-й

Кроме того, ученики Рейлсайд получали гораздо большее удовольствие от математики и продолжили изучать этот предмет на более высоком уровне. В школе 41% учеников прошли углубленный курс начал анализа и анализа (из тех, кто обучался традиционным способом, таких было 27%). Кроме того, в Рейлсайд снизилось или исчезло расовое неравенство в плане

успеваемости учеников (YouCubed at Stanford University, 2015a).

Не так давно была опубликована важная книга, посвященная анализу достижений Рейлсайд и применяемых в ней справедливых методов обучения, которую написали учителя этой школы (Nasir, Cabana, Shreve, Woodbury, & Louie, 2014).

Ниже представлен анализ того, как школе удалось добиться таких впечатляющих результатов, придерживаясь четырех принципов комплексного обучения: многоплановости, распределения ролей, присвоения компетенции и коллективной ответственности учеников (рис. 7.4).

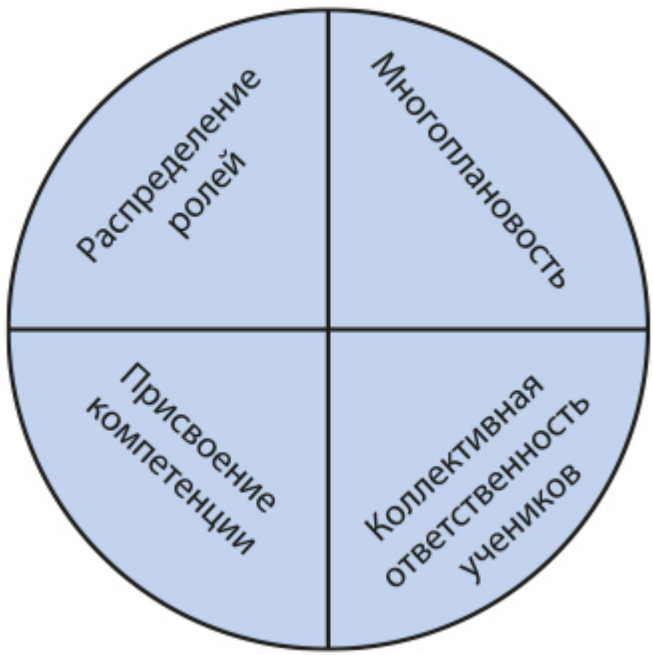


Рис. 7.4. Комплексное обучение

Многоплановость

Одноплановые уроки математики, широко распространенные в США, — это уроки, на которых практика ценится превыше всего и цель состоит в правильном выполнении процедур. Такой узкий критерий успеха приводит к тому, что некоторые ученики поднимаются на самый высокий уровень, получая хорошие оценки и похвалу учителя, а другие опускаются на самый низкий, причем большинству учеников известно их место в иерархии. Такие уроки одноплановые, поскольку на них есть только один способ добиться успеха. На многоплановых уроках математики учителя используют *все* методы работы.

Например, дети выполняют вычисления, а вдобавок задают

интересные вопросы, предлагают идеи, устанавливают связи между разными методами, используют много разных форм представления, выстраивают цепочки логических рассуждений и предпринимают много других действий. Математика — широкая и многоплановая дисциплина. В классах, где применяется комплексный метод, учителя оценивают знания учеников по многим аспектам математики. На стенах классных комнат школы Рейлсайд был вывешен такой девиз комплексного обучения:

> Никто не может успешно применять все эти методы работы, но каждый может овладеть некоторыми из них.

Во время бесед с учениками, принимавшими участие в нашем исследовании, мы задавали такой вопрос: «Что необходимо для достижения успеха в математике?» 97% детей, которых обучали в соответствии с традиционным подходом, дали один и тот же ответ: «Работать очень внимательно». Это пассивный подход, который ассоциируется с низким уровнем успеваемости (Bransford, Brown, & Cocking, 1999). Когда мы задали этот же вопрос на уроках в Рейлсайд, дети назвали целый ряд методов работы:

- постановка хороших вопросов;
- изменение формулировки задач;
- объяснение;
- использование логики;
- обоснование методов;
- использование развивающих материалов;
- установление связи между идеями;
- помощь другим.

Ученик по имени Рико сказал: «В средних классах мы просто отрабатывали математические навыки. Но здесь все работают вместе, стараются помогать другим и получать помощь. Это позволяет совершенствовать навыки общения, математические навыки и навыки логического мышления» (ученик Рейлсайд, год 1-й).

Рико рассказал нам о той широте математики, которую он испытал на своем опыте. Ученица по имени Жасмин добавила: «На уроках математики приходится взаимодействовать со всеми, разговаривать с ними и отвечать на их вопросы. Нельзя просто сказать: “Вот учебник, посмотри на числа и разберись во всем”». Когда мы спросили Жасмин, чем можно объяснить тот факт, что уроки математики отличаются от остальных, она сказала: «Это не один способ сделать что-то. Тут все интерпретируют по-своему. Это не только один ответ. Есть много способов все понять. К тому

же возникает вопрос: “Почему это работает?”» (ученица школы Рейлсайд, год 1-й). Жасмин подчеркивает социальный и интерпретативный характер математики, когда ученики выходят за рамки учебника и чисел, чтобы осмыслить концепции, проанализировать разные подходы и обосновать ход своих мыслей, отвечая на важный вопрос «Почему это работает?»

В школе Рейлсайд учителя разработали многоплановые занятия с учетом многих аспектов. Это стало возможно благодаря постановке содержательных задач, которые учителя обозначили как задачи, заслуживающие внимания всей группы. Их трудно решить в одиночку, они требуют вклада разных членов группы.

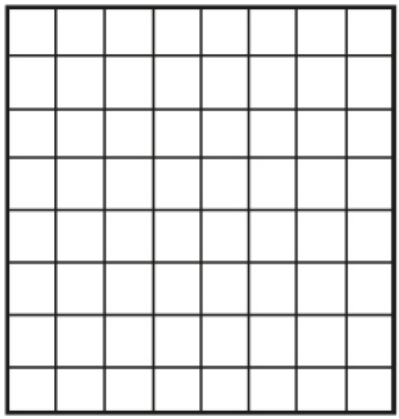
Лани Хорн определяет задачи, заслуживающие внимания всей группы, как «задачи, которые иллюстрируют важные математические концепции, допускают разные формы представления, опираются на эффективное использование коллективных ресурсов группы и имеют несколько возможных решений» (Horn, 2005, p. 22). В примерах 7.1 и 7.2 приведены задачи, которые можно считать заслуживающими внимания группы (они взяты с сайта nrich.maths.org). Полное их описание можно найти в приложении.

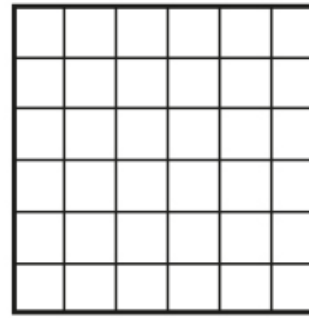
ПРИМЕР 7.1. СОРТИРОВКА ЧИСЕЛ

Как насчет того, чтобы решить простую головоломку?

Эта задача предназначена для работы в группах из четырех человек. (Примечания учителей и их идеи по поводу расширения задачи можно найти здесь: http://nrich.maths.org/6947&part=note.)

1. Есть два пазла, которые учитель может распечатать для вас (см. ниже). Сложите каждый, а затем выложите все фрагменты на расчерченные квадраты, которые также можно распечатать.





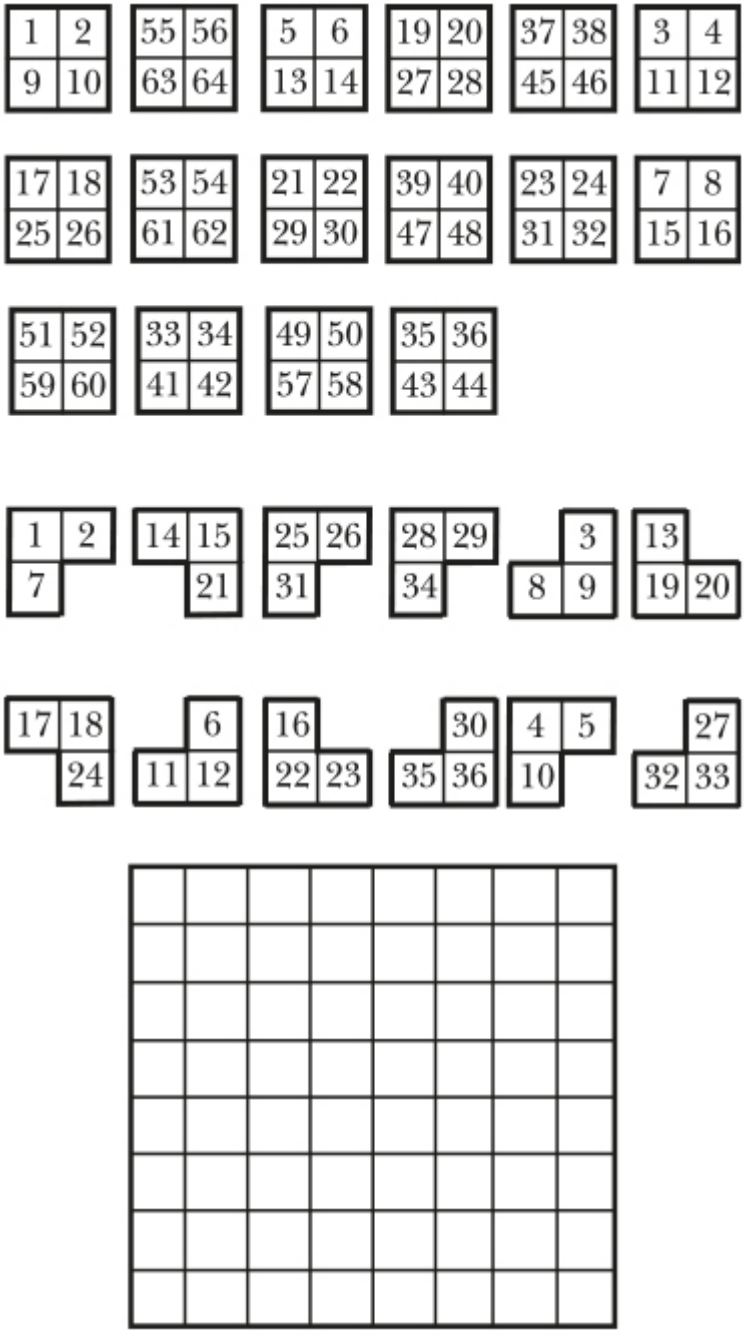
2. Положите меньший квадрат на больший любым удобным для вас способом, чтобы ячейки совпадали. (Возможно, вам будет легче сделать это, если вы скопируете числа, расположенные на меньшем квадрате, на кальку.)

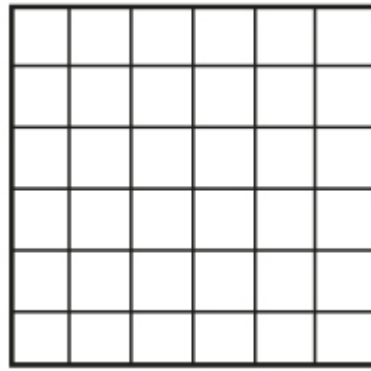
3. Проанализируйте, что произойдет, когда вы сложите числа, расположенные друг над другом.

4. В своей группе проанализируйте все идеи, которые у вас появятся.

Когда вы рассмотрите все 36 комбинаций, вам, вероятно, нужно будет задать вопрос: «Интересно, что произойдет, если мы…» Внесите одно небольшое изменение, проанализируйте этот вариант, а затем сравните два набора результатов.

Возможно, вы захотите задать вопрос: «Почему…»


1 2
9 10
55 56
63 64
5 6
13 14
19 20
27 28
37 38
45 46
3 4
11 12
17 18
25 26
53 54
61 62
21 22
29 30
39 40
47 48
23 24
31 32
7 8
15 16
51 52
59 60
33 34
41 42
49 50
57 58
35 36
43 44
1 2
7
14 15
21
25 26
31
28 29
34
3
8 9
13
19 20
17 18
24
6
11 12
16
22 23
30
35 36
4 5
10
27
32 33



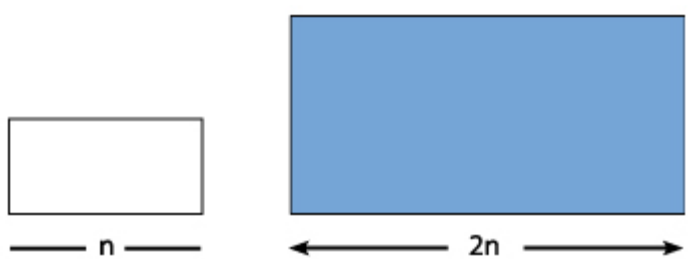
Источник: NRICH (http://nrich.maths.org/6947).

ПРИМЕР 7.2. РАСТУЩИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

Представьте себе прямоугольник площадью 20 см^2.

Какими могут быть длина и ширина этого прямоугольника? Перечислите минимум пять разных комбинаций.

Представьте себе, что вы увеличили прямоугольник вдвое.



Назовите размеры увеличенного прямоугольника и найдите его площадь. На что вы обратили внимание?

Попробуйте начать с прямоугольника с другой площадью и увеличить его вдвое. На что вы обратили внимание теперь?

Можете ли вы объяснить, что происходит?

Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в 3, 4 или 5 раз? Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в дробное количество раз?

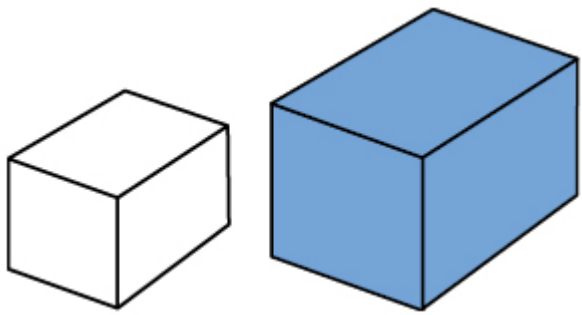
Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в k раз?

Объясните и обоснуйте выводы, к которым вы пришли.

Применимы ли эти выводы к другим двумерным фигурам, кроме прямоугольника?

Теперь проанализируйте, что произойдет с площадью поверхности и объемом различных прямоугольных параллелепипедов, если увеличить их в разное количество раз.

Объясните и обоснуйте выводы, к которым вы пришли.

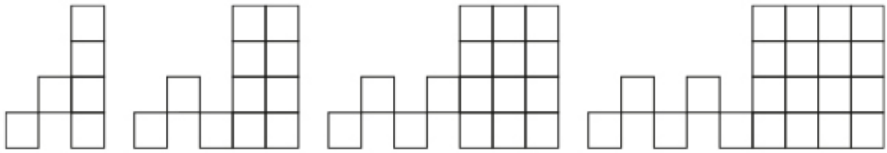


Применимы ли эти выводы к другим объемным фигурам, кроме прямоугольного параллелепипеда?

Источник: NRICH (http://nrich.maths.org/6923).

Пример 7.3 — задание из школы Рейлсайд, где учителя впервые поставили ученикам задачи на линейную функцию (они называют их схемами формирования горок), которые отображали определенную форму представления, и предложили им определить, какой будет, скажем, горка № 10.

ПРИМЕР 7.3. ЗАДАЧА НА ЛИНЕЙНУЮ ФУНКЦИЮ



Как растут эти фигуры?

Можете ли вы определить, какой будет фигура на шаге 100?

Какой будет фигура на шаге *n*?

Одни группы могли представить ответ на этот вопрос в геометрической форме, другие — в числовой, с помощью таблицы из двух столбцов, а третьи — в алгебраической. После того как ученики рассказывали о своих решениях, учителя задавали вопрос: «Кто-нибудь понял это иначе?»

Позже учителя Рейлсайд начали давать более сложные и интересные задания, в рамках которых предоставлялась не вся необходимая информация и ученикам приходилось вместе работать над воссозданием отсутствующих элементов таблицы, графика, уравнения и геометрического представления закономерности, как показано на рис. 7.5.

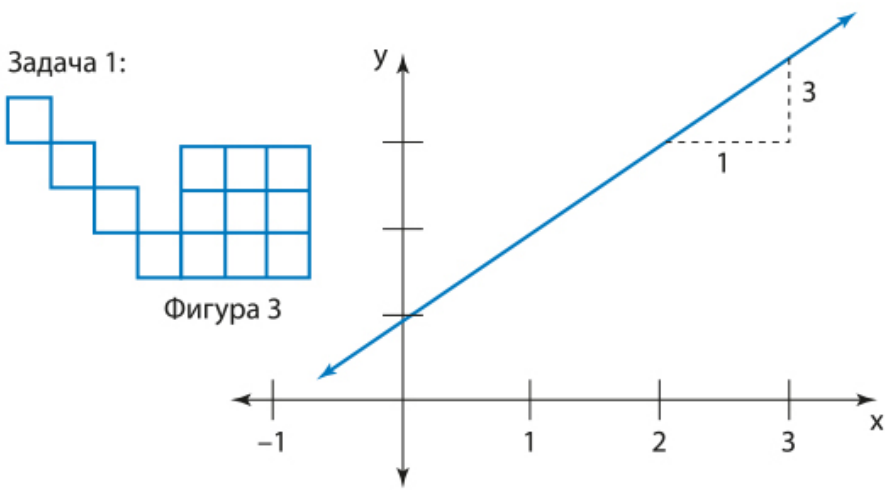


Рис. 7.5. Задача CPM

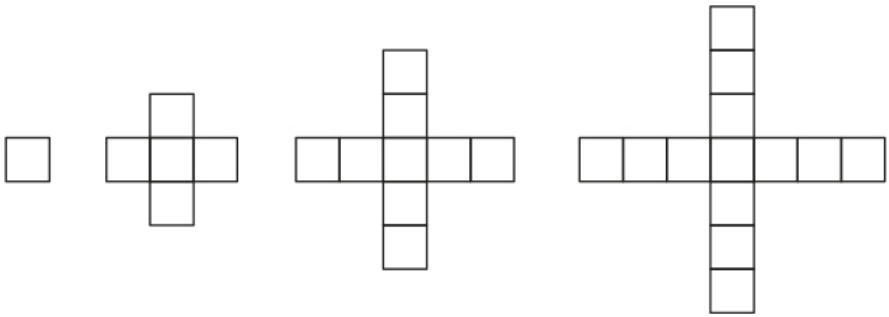
Более подробная информация об этих и других задачах, которые используются в школе Рейлсайд, можно найти в книге, которую написали ее учителя (Nasir et al., 2014). Многие задачи такого рода представлены в модуле курса CPM[18] под названием Connections («Связи»). В свое время учителя Рейлсайд преподавали математику в рамках традиционных методов в

группах, сформированных по принципу успеваемости, но многие ученики не справлялись с этим предметом.

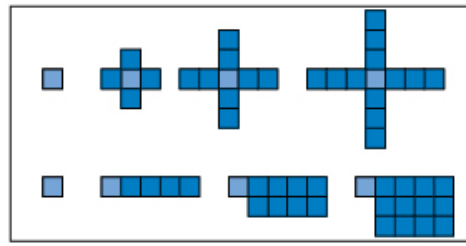
Учителя Рейлсайд не считали, что эти неудачи обусловлены недостатками самих учеников, хотя многие дети поступили в школу с объемом знаний по математике на уровне второго класса. Они подали заявку на грант, который позволил им все лето заниматься планированием новой учебной программы и разработкой нового подхода. Эти учителя уже знали о комплексном обучении, поэтому отказались от формирования классов по успеваемости и разработали вводный курс алгебры, который должны были пройти все новички-старшеклассники. Они создали курс алгебры, который был глубже, чем традиционный, чтобы дать увлекательный опыт всем детям, даже уже изучавшим алгебру. Поскольку учителя Рейлсайд были глубоко привержены идее равенства и совместного обучения, они разработали и внедрили программу, которая открывала ряд возможностей для изучения математики. Стандартные учебники обычно организованы вокруг таких математических методов, как построение графиков линейных функций или разложение многочленов на множители. Учителя Рейлсайд организовали свою программу вокруг таких важных концепций, как «Что такое линейная функция?» Они не составляли задачи; они взяли глубокие, концептуальные задачи по математике из опубликованных учебных программ, таких как College Preparatory Mathematics — CPM («подготовительный курс математики для поступления в колледж») и Interactive Mathematics Program — IMP («программа интерактивного изучения математики»). Кроме того, они решили представлять алгебру с помощью не только рисунков, но и различных предметов, включив в учебную программу специальные развивающие материалы, которые используются для осмысления алгебраических концепций (Picciotto, 1995).

Основным элементом курса алгебры, а впоследствии и других курсов, которые преподавались в Рейлсайд, было множество форм представления: ученикам часто предлагали представить свои идеи разными способами, например в виде слов, графиков, таблиц, символов и диаграмм. Кроме того, детям советовали использовать метод цветового кодирования, представляя каждую идею своим цветом — например, использовать один и тот же цвет для отображения оси x в выражении, диаграмме, на графике, в таблице и текстовом описании (пример 7.4).

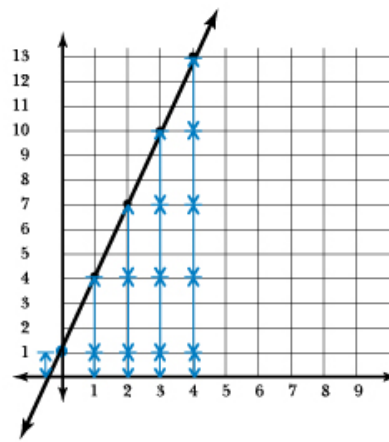
ПРИМЕР 7.4. ЗАДАЧА НА МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФУНКЦИЮ



$y = 4x + 1$



X	Y
0	4(0) + 1 = 1
1	4(1) + 1 = 5
2	4(2) + 1 = 9
3	4(3) + 1 = 13
n	4n + 1



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- На этапе 1 *один* квадрат.
- На каждом очередном этапе **к каждой стороне исходного квадрата прибавляется еще один квадрат.**
- Фигура растет влево, вправо, вверх и вниз; на каждом этапе прибавляется **четыре квадрата.**

Многоплановый характер уроков в Рейлсайд способствовал тому, что ученики этой школы начали добиваться больших успехов. Проанализировав причины повышения уровня успеваемости в этой школе, мы поняли, что дело было в большем

количестве способов добиться успеха.

Учителя Рейлсайд оценивали знания учеников по многим аспектам, а также использовали многофакторную систему оценки (см. главу 8). Стандартные тесты, которые ученики должны были сдавать по требованиям штата Калифорния, не предусматривали оценку знаний в соответствии с многоплановым подходом, но школьники все равно показали очень высокие результаты, потому что научились добиваться успеха на уроках и не боялись математики. Кроме того, к моменту сдачи тестов штата ученики уверенно владели навыками решения задач и были готовы ответить на любой вопрос. Результаты тестирования школьников Рейлсайд по математике были выше, чем по другим предметам (что очень необычно), а сама школа превзошла все остальные школы округа по математике, хотя и была расположена в районе с самым низким уровнем доходов населения.

Во время одного урока алгебры, на котором я присутствовала, ученикам задали как всегда сложную и интересную задачу с краткими инструкциями. Им предложили воспользоваться математическими инструментами, например таблицами с двумя столбцами и графиками, чтобы составить уравнение вида $y = mx + b$, позволяющее вычислить длину шнурков для ботинок разных размеров (пример 7.5).

ПРИМЕР 7.5. ШНУРКИ

Шнурки какой длины нужны для ботинок разных размеров?

Проанализируйте соотношение между длиной шнурков и размером ботинок.

Составьте уравнение вида $y = mx + b$, которое поможет башмачнику определить длину шнурков, подходящих ботинкам разных размеров.

Учительница предложила группам учеников поработать с

настоящими шнурками, предоставленными одним из членов группы. Она сформулировала задачу, сообщив ученикам, что существует много способов решения этой задачи, а успешная работа над ней потребует правильной коммуникации между членами группы: все должны выслушивать мнение других и давать друг другу возможность обдумать свою работу. Кроме того, учительница объяснила, что ученики получат более высокую оценку за эту задачу, если проиллюстрируют и объяснят свою работу несколькими способами.

Как и в случае многих математических вопросов, для многих учеников самым трудным было начало: нужно было понять, с чего начать. Им предложили составить уравнение, которое поможет купить шнурки. Это открытая постановка задачи, позволяющая самостоятельно определить, что в их уравнении могут быть представлены такие переменные, как число отверстий для шнурков и длина, необходимая для того, чтобы завязать бант. Кроме того, нужно было определить, что переменная *y* должна представлять в уравнении искомую длину шнурков.

Наблюдая за уроком, я заметила, что многие группы не знали, с чего начать. Мальчик из одной группы сразу заявил: «Я этого не понимаю», а другой согласился с ним: «Я не понимаю вопрос». В этот момент девочка из этой же группы предложила мальчикам еще раз прочесть вопрос вслух. Один мальчик спросил остальных: «Как этот ботинок связан с уравнением?» Другой предложил определить длину своих шнурков. Члены группы начали измерять длину завязки, и в этот момент один мальчик сказал, что им нужно учесть количество отверстий для шнурков. Группа продолжила работу; дети помогали друг другу, задавая вопросы, которые должны была проанализировать группа.

Я наблюдала много подобных ситуаций, когда ученики смогли приступить к решению задачи, подбадривая друг друга, перечитывая задание и задавая друг другу вопросы. Им предлагали прочесть задачу вслух, а когда они не могли двигаться дальше — задавать друг другу вопросы такого рода.

- Что подразумевает этот вопрос?
- Как можно изменить формулировку этого вопроса?
- Каковы основные элементы этой задачи?

В Рейлсайд учителя использовали такой подход: поставить группам задачу, а когда все закончат работу, задать дополнительный вопрос для оценки понимания. Благодаря вопросам, а также поддержке учителей (например, те предлагали иначе сформулировать задачу) ученики научились задавать такие же полезные вопросы друг другу. Вскоре после того, как они

начали измерять длину завязок и размышлять о зависимости между ней и количеством отверстий для шнурков, повысился уровень вовлеченности всего класса. Это было обусловлено рядом факторов.

• Работа учителя, который обеспечил продуманную постановку задачи и ходил по классу, задавая ученикам вопросы.

• Сама задача, которая была достаточно открытой и увлекательной, чтобы разные ученики смогли внести свой вклад в ее решение.

• Многоплановость занятия, в ходе которого приветствовались разные способы работы: постановка вопросов, построение диаграмм и выдвижение гипотез.

• Предложение использовать в работе над задачей предмет и идею из реального мира.

• Высокий уровень коммуникации между детьми: они научились поддерживать друг друга, задавая вопросы.

Метод групповой работы используют многие кафедры математики, но они не добиваются таких же высоких показателей успеха учеников и того уровня эффективности работы, который мы видели в Рейлсайд. Одна из причин успеха учеников этой школы состоит в том, что в ней преподают и высоко ценят многоплановую математику, а также учат помогать друг другу.

Распределение ролей

Когда учеников распределили по группам, каждому из них выделили роль в своей группе. В примере 7.6 показан рабочий лист с описанием ролей, который выдается ученикам.

ПРИМЕР 7.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РОЛЕЙ В ГРУППЕ — США

Фасилитатор

• Позаботьтесь о том, чтобы ваша группа прочла эту карточку, прежде чем приступать к заданию. «Кто хочет прочесть? Все поняли, что нужно делать?»

• Обеспечивайте сплоченность группы. Позаботьтесь о том, чтобы были услышаны идеи каждого. «Кто-то понял это иначе? Мы готовы двигаться дальше?» Убедитесь, что каждый член группы может объяснить свои идеи.

Секретарь (составитель отчета)

• Ваша группа должна структурировать полученные результаты. Необходимо, чтобы они отражали идеи всех участников и были упорядоченными. Используйте разные цвета, стрелки и другие инструменты, передающие суть математических концепций, аргументов и связей. «Как нам проиллюстрировать эту идею?» Будьте готовы участвовать в совещании с учителем.

Ответственный за ресурсы

• Получите материалы, необходимые вашей команде.

• Убедитесь, что все вопросы требуют командной работы.

• Когда ваша команда закончит работу, позовите учителя, чтобы проанализировать вместе с ним результаты.

Капитан команды

• Напоминайте своей команде о необходимости обосновывать все математические утверждения и искать связи между ними. «Почему вы в этом так уверены? Как это связано с?..»

• Не допускайте никаких разговоров вне группы!

Когда я представила комплексный метод учителям в Англии, они изменили некоторые роли, потому что хотели, чтобы те звучали по-британски и чтобы в них была меньше выражена иерархия. В примере 7.7 показана система распределения ролей, которую предложили английские учителя.

ПРИМЕР 7.7. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РОЛЕЙ В ГРУППЕ — ВЕЛИКОБРИТАНИЯ

Организатор

• Обеспечивайте сплоченность группы и ее сфокусированность на решении задачи; позаботьтесь о том, чтобы никто не разговаривал с участниками других групп.

Снабженец

• Вы единственный человек, который может покинуть свое место, чтобы найти для группы линейки,

калькуляторы, карандаши и другие инструменты.

• Убедитесь, что все готовы к работе, прежде чем звать учителя.

Обеспечивающий понимание

• Позаботьтесь о том, чтобы участники группы поняли все идеи.

• Если вы не понимаете идею, спросите того, кто ее предложил, а если понимаете, убедитесь, что остальные тоже ее понимают.

• Позаботьтесь о том, чтобы все важные детали ваших разъяснений были записаны.

Обеспечивающий вовлеченность

• Позаботьтесь о том, чтобы были выслушаны идеи каждого члена группы; предложите другим членам группы внести свои предложения.

Распределение ролей — важная часть комплексного обучения. Оно дает каждому ученику возможность выполнить свою функцию и стимулирует ответственность. Как показывает пример Великобритании, учителя могут адаптировать эти роли к нуждам своих классов.

В классах, которые занимаются по комплексному методу, плакат со схемой распределения групп и ролей размещается на стене. Ученики распределяются по группам и получают роли в случайном порядке.

Раз в несколько недель ученикам предлагают изменить распределение групп и ролей. Во время урока учителя время от времени акцентируют внимание на разных ролях. Например, в самом начале они напоминают фасилитаторам о необходимости помочь ученикам проверить ответы, показать свою работу или задать вопросы.

Все учителя знают, как трудно заставить учеников выслушать их, если те уже начали работу в группах и с воодушевлением обсуждают математические вопросы. Но учителям часто нужно дать ученикам новую информацию или придать групповой работе новое направление.

В случае комплексного подхода учителя не пытаются успокаивать класс. Они вызывают секретарей (составителей отчетов) на совещание. Те приходят на мероприятие, где учитель предоставляет им информацию, которую каждый из них передаст своей группе. Такой подход не только помогает учителю, но и возлагает на учеников ответственность, которая придает им

больше уверенности в своих силах. Распределение ролей в рамках комплексного обучения стало неотъемлемой частью взаимосвязанной системы, которая действовала на уроках в школе Рейлсайд и в которой у каждого была важная работа и ученики научились полагаться друг на друга.

Присвоение компетенции

Присвоение компетенции — интересный и тонкий подход, который рекомендуется использовать в системе комплексного обучения. Учитель повышает статус учеников, которые, по его мнению, имеют низкий статус в группе — например, похвалив их за то, что они сказали или сделали нечто имеющее интеллектуальную ценность, а также обратив на это внимание всего класса. В частности, учитель может попросить ученика представить свою идею или в присутствии всего класса похвалить его за выполненную работу.

Я не понимала метод присвоения компетенции до конца, пока не увидела его в действии. Однажды во время визита в Рейлсайд я наблюдала за работой группы из трех учеников. Когда подошел учитель, тихий мальчик-славянин невнятно что-то сказал двум другим членам группы — веселым и активным латиноамериканским девочкам, которые направляли работу группы. Вот что заявил Иван: «Эта задача похожа на предыдущую, которую мы решали». Учитель, который подошел к столу этой группы, сразу обратил внимание на эти слова: «Иван, это очень важная мысль; задача действительно похожа на предыдущую, и мы должны подумать о том, что общего есть у этих двух задач и чем они отличаются». Затем, когда девочки предложили ответ на один из вопросов учителя, он сказал: «Это же похоже на идею Ивана; вы развиваете ее». Учитель повысил статус вклада Ивана, который почти наверняка был бы потерян без его вмешательства. Было заметно, как Иван выпрямился и подался вперед, когда учитель похвалил его идею, а затем напомнил девочкам о ней. По рекомендациям Элизабет Коэн (Cohen, 1994), которая разработала метод комплексного обучения, если обратная связь с учениками призвана решить проблему статуса, она должна носить публичный, интеллектуальный и конкретный характер, а также быть связанной с задачей группы. Публичность обратной связи крайне важна, поскольку другие ученики узнают, что данный ученик предложил идею; интеллектуальность обратной связи гарантирует, что она представляет собой один из аспектов математической работы; конкретность обратной связи означает, что ученики точно знают, что именно хвалит учитель.

Ответственность учеников за обучение друг друга

Формирование ответственности за обучение друг друга — важный элемент справедливых результатов, полученных в школе Рейлсайд, а также центральный элемент метода комплексного обучения. Многие школы используют групповую работу в расчете на то, что ученики смогут сами развить ответственность друг за друга, но эта задача пока не решена. В Рейлсайд учителя применяли много разных методов, чтобы помочь школьникам научиться хорошо работать вместе и ощущать ответственность друг за друга. Одно из важных решений, принятых учителями этой школы, состояло в том, чтобы в самом начале первого года обучения потратить 10 недель первого курса алгебры на обучение детей методам эффективной групповой работы. В этот период ученики занимались математикой, но она была второстепенной целью учителей. Главным для них было обучить школьников эффективно работать в группах. Любой, кто посещал занятия в школе Рейлсайд после этого 10-недельного периода, видел, что такое вложение времени полностью оправдывало себя: ученики поддерживали уважительный диалог, выслушивали друг друга и развивали идеи друг друга.

Обучая группы, я тоже сначала уделяю какое-то время тщательной разработке правил уважительного общения и выслушивания мнений. Перед началом занятий математикой я даю членам группы такое задание: вместе обсудить, какие слова или действия других в процессе общей работы над заданиями по математике им нравятся или не нравятся. Мы вместе делаем два больших плаката: на одном записано все, что нравится группе, а на другом — что не нравится. Затем мы вешаем их на стену. В списке действий, которые членам группы не нравятся, обычно фигурирует многое из того, что я тоже не хотела бы допускать: например, когда один ученик выполняет задание и сообщает ответ остальным, или когда ученики начинают вести себя высокомерно и говорят нечто вроде: «Это просто», или когда кого-то исключают из обсуждения. Я пришла к выводу: когда ученики сами анализируют положительные и отрицательные аспекты группового обсуждения и составляют свои списки, они более вдумчиво относятся к способам взаимодействия в группах. Плакаты висят на стене, а я время от времени напоминаю ученикам и группам о наших правилах.

Кроме того, в начале урока я объясняю ученикам, что для меня важно. Я говорю им, что не вижу особой ценности в скорости или спешке в изучении математики; я ценю людей, которые показывают, как они размышляют над математикой и как важно выслушивать мнения других и относиться друг к другу с

уважением. В главе 9 я расскажу о замечательном виде деятельности, который помогает научиться эффективно работать в группах.

Учителя Рейлсайд стимулировали групповую ответственность, задавая одному из членов группы вопрос по математике, имеющий отношение к работе группы. Он всегда носил концептуальный характер, и на него мог ответить только тот, кому его задали. Ученика выбирали случайным образом, другим не разрешалось ему помогать. Если ученик не мог ответить на вопрос, учитель отходил, сказав, что нужно добиться понимания материала всеми членами группы. Затем возвращался и снова задавал этот вопрос тому же ученику. За это время группа должна была помочь участнику изучить необходимый материал. В приведенном ниже интервью две девочки, Гита и Брианна, напрямую связывают свои представления о математике и обретенную ответственность с этим действием учителя.

> **Интервьюер:** Изучение математики — индивидуальный или социальный процесс?
>
> **Г.:** И то и другое. Если ты что-то понимаешь, нужно объяснить это другим. Иногда нам дают общую задачу, и мы все должны разобраться с ней. Так что, думаю, и то и другое.
>
> **Б.:** Мне кажется, что и то и другое. Ведь необходимо самому знать материал, чтобы объяснить его другим в процессе общей работы. Ведь никогда не известно, кого из четырех выберет учительница. И все зависит от того, чтобы один человек, которого она выберет, получил правильный ответ. (Школа Рейлсайд, год 2-й.)

Ученицы из представленного выше фрагмента интервью указали на прямую связь между тем, что учителя предлагают любому члену группы ответить на вопрос, и ответственностью за свою группу. Кроме того, они раскрывают интересную социальную установку в отношении математики, заявляя, что знать изучаемый материал необходимо не для того, чтобы быть лучше остальных, а для того, чтобы помочь другим.

Учителя школы Рейлсайд использовали для стимулирования групповой ответственности еще один метод. Он может вызвать у кого-то возмущение, но на самом деле позволяет донести до членов группы мысль о том, что они несут ответственность друг за друга. Время от времени учителя проводили так называемые групповые тесты. Ученики сдавали тесты индивидуально, но учителя принимали только один (выбранный случайным образом) лист с заданиями от каждой группы и ставили оценку, которая

становилась оценкой всех членов группы. Для учеников это был четкий сигнал, напоминающий им о необходимости позаботиться о том, чтобы все члены группы поняли соответствующий материал.

Ученики пришли в школу Рейлсайд, имея за плечами восьмилетний опыт индивидуальной работы и воспринимая математику как индивидуальный, конкурентный вид деятельности. В Рейлсайд они узнали о другой математике и других целях обучения и быстро адаптировались к ним без особых сложностей. Вскоре после начала учебы школьники начали воспринимать математику как общее занятие, в котором главное — помогать друг другу и работать вместе. В первые месяцы сильные ученики жаловались нам на то, что им постоянно приходится объяснять свою работу, но через несколько месяцев изменилось даже их отношение. Эти ребята начали ценить то, что они работают в группах и могут объяснить ход своих мыслей, поскольку поняли, что это помогает им самим осмыслить изучаемый материал.

Имельда, одна из девочек, которая изучала анализ в последние годы нашего курса, так описала то, как социальная ответственность помогла ей.

> Думаю, люди воспринимают это как ответственность. Думаю, до этого они доросли после стольких уроков по математике. Может, в девятом классе ты думаешь так: «О боже, не хочу им помогать, хочу сделать свою работу, почему мы должны проходить этот групповой тест?» Но когда ты начинаешь изучать углубленный курс анализа, ты уже думаешь так: «О, нужно пройти групповой тест, прежде чем сдавать свой». Так что чем больше ты изучаешь математику и чем больше учишься, тем больше ценишь то, что имеешь: «Слава богу, я в группе!» (Имельда, школа Рейлсайд, год 4-й.)

Хотя учителя Рейлсайд и не ставили такую цель, по результатам статистического анализа мы обнаружили, что формирование разнородных групп и комплексный подход принесли самую большую пользу ученикам, которые изначально относились к числу сильных. Их обучение ускорилось в большей степени, чем у других учеников школы; кроме того, они добивались гораздо более высоких результатов в учебе по сравнению с подростками, которые проходили углубленные курсы в других школах, — отчасти потому, что объясняли свою работу, благодаря чему повышался уровень осмысления

материала, а также потому, что их работа была более многоплановой. Многие из этих учеников пришли в Рейлсайд, обладая хорошими навыками быстрых вычислений и выполнения процедур, и необходимость расширить и углубить работу над математикой во многом способствовала повышению их успеваемости.

Кроме того, у учеников Рейлсайд сформировались более широкие представления о роли разных учеников. Они начали понимать, что каждый может внести свой вклад в решение задачи. По мере того как подход к обучению становился все более многоплановым, у них сформировалось многоплановое восприятие друг друга и они начали ценить разные способы понимания и осмысления математических идей, которые другие привносили в решение задач. Вот рассуждения еще двух учениц этой школы.

> **Интервьюер:** Как вы думаете, что необходимо, чтобы добиться успеха в математике?
>
> **А.:** Способность работать с другими людьми.
>
> **Э.:** Открытость мышления и умение выслушивать идеи других.
>
> **А.:** Необходимо прислушиваться к мнению других, потому что ты можешь ошибаться.
>
> **Э.:** Ты можешь ошибаться, потому что есть много разных способов все понять.
>
> **А.:** У каждого свой способ выполнения заданий, всегда можно найти разные способы что-то понять, что-то выяснить.
>
> **Э.:** Кто-нибудь предлагает какой-то способ что-то сделать, и мы всегда думаем так: «Надо же, не могу поверить, что ты мог такое придумать». (Аяна и Эстель, школа Рейлсайд, год 4-й.)

Во время интервью ученики рассказали нам, что благодаря подходу школы Рейлсайд они научились ценить представителей разных культур, классов и пола.

> **Р.:** Знаете, я люблю эту школу. В паре километров от нас есть другие, совсем непохожие школы — они разделены на расовые группы и все такое. А в этой каждого принимают как личность и никто не смотрит на цвет кожи.
>
> **Интервьюер:** Этому способствует подход к математике или это влияние школы в целом?
>
> **Д.:** Группы по математике помогают объединить

детей.

Р.: Да. Когда переходишь из одной группы в другую, то общаешься с бо́льшим количеством людей, чем когда сидишь в классе на отведенном тебе месте, где тебя видят только те, кто вокруг, и ты не знаешь тех, кто в другом конце класса. На уроках математики ты должен говорить, заявлять о том, что ты чего-то не понимаешь, или рассказывать о том, что ты изучаешь. (Роберт и Джон, школа Рейлсайд, год 4-й.)

В школе Рейлсайд учителя математики высоко ценили равенство, но не использовали материалы учебных программ, поднимающие вопросы пола, культуры или класса, как кое-кто рекомендовал (Gutstein, Lipman, Hernandez, & de los Reyes, 1997). Они учили детей ценить различные подходы к математике. По мере того как занятия становились более многоплановыми, школьники учились ценить идеи разных учеников.

Многие родители беспокоятся о перспективах сильных учеников в смешанных группах, считая, что слабые ученики снизят общую успеваемость. Но обычно такого не происходит. В образовательной системе США сильные ученики часто получают такой статус, потому что умеют быстро выполнять процедуры. Многие из них не научились глубоко анализировать идеи, объяснять свою работу или рассматривать математическую задачу с разных точек зрения, поскольку им никто никогда не предлагал этого. Работа в группах идет им на пользу, поскольку позволяет глубже осмыслить материал и обосновать свое мнение, лучше поняв предмет. Присутствие отстающих не снижает общий уровень достижений группы; уровень дискуссий повышается до уровня мышления самых сильных учеников. Если бы в состав групп входили ученики с одинаковым уровнем успеваемости, это не принесло бы пользы ни сильным, ни слабым.

Ученицы Рейлсайд поняли, что у каждого свой уровень знаний, и научились ценить сильные стороны разных учеников, как отметил Зак.

> У каждого свой уровень, и это отлично: ведь все постоянно учат друг друга и помогают друг другу.

Два метода, которые я считаю особенно важными для обеспечения равенства и которые сыграли центральную роль в формировании ответственности учеников друг за друга, — обоснование и рассуждение. В школе Рейлсайд ученики должны были постоянно обосновывать свои ответы и аргументировать выбор методов. Тому есть много веских причин, учитывая, что

обоснование и рассуждение — по сути математические методы (Boaler, 2013c), при этом играющие интересную и особенную роль в обеспечении равноправия.

Представленный ниже фрагмент взят из беседы с Хуаном, который был в то время одним из самых слабых в классе. Вот что он рассказал о том, как ему помогли методы обоснования и рассуждения.

> Большинство из них просто знают, что делать и всё такое. Сначала я думаю: «Зачем мне это задали?» — а потом выполняю свою работу и сравниваю ее с их работой. Их работа совсем другая, потому что они знают, что делать. И я говорю: «Дай списать»; я спрашиваю: «Почему ты сделал так?» А потом говорю: «Я не понимаю, почему ты получил такой ответ». Иногда ответ прост… «Да, он прав, а ты ошибся». Но почему?

Хуан четко дал понять, что ему помог метод обоснования и ему по душе возможность подтолкнуть других к тому, чтобы они вышли за рамки ответов и объяснили, почему они дали их, иными словами — порассуждали. В школе Рейлсайд учителя делали особый упор на том, что у каждого есть две важные обязанности.

> Всегда помогайте, когда нужна ваша помощь, и всегда просите о помощи, когда она нужна вам.

Обе эти обязанности играли важную роль в обеспечении равенства, а обоснование и рассуждение стали полезными элементами обучения широкого круга школьников.

Было бы трудно провести целые годы на уроках в Рейлсайд, не обратив внимания на то, что дети учатся общаться друг с другом более уважительно, чем в обычных школах, а этнические группировки (вроде тех, о которых говорили Роберт и Джон) на уроках математики менее выражены, чем на большинстве других уроков. На занятиях математикой школьников учили ценить вклад разных учеников из разных культурных групп и с разными личными качествами и взглядами. У меня создалось впечатление, что благодаря этому школьники научились чему-то очень важному — тому, что сослужит им и другим добрую службу в будущем, при взаимодействии с другими членами общества. Я назвала это *отношенческим* равенством (Boaler, 2008). Это такая форма равенства, в которой главное — не одинаковые результаты тестов, а уважение и забота о других независимо от их культуры, расы, религии, пола и других характеристик. Принято считать, что ученики научатся с уважением относиться к разным людям и

культурам, если будут обсуждать эти вопросы или читать разноплановые книги на уроках литературы или естествознания. Я считаю, что *все* предметы могут внести свой вклад в обеспечение равенства, и математика — которую часто считают самой абстрактной дисциплиной, весьма далекой от вопросов ответственности за обеспечение культурной или социальной осведомленности, — может внести в это важный вклад. Уважительные отношения между учениками школы Рейлсайд независимо от культуры и пола стали возможными только благодаря подходу к преподаванию математики, при котором в процессе решения задач учитываются разные идеи, методы и мнения.

Резюме

Справедливый подход к преподаванию, ориентированный на мышление роста, сложнее традиционного, при котором учитель объясняет материал и дает короткие задания для практики. Он подразумевает преподавание широкой, открытой, многоплановой математики, обучение ответственности друг за друга и объяснение сути мышления роста. Это самый важный и приносящий самое большое удовлетворение подход, который может использовать учитель математики: наблюдая за увлеченными и успешными учениками, учителя ощущают удовлетворение и прилив энергии. Мне посчастливилось работать со многими учителями, которые привержены идее равенства и придерживаются подхода к преподаванию и разделению на группы, ориентированного на мышление роста, даже если не используют именно эти слова. В этой главе представлены многие из тех идей, о которых я узнала за многие годы работы и исследований с участием этих очень успешных учителей. Свою любимую стратегию стимулирования эффективной групповой работы я оставила для главы 9, где пойдет речь обо всех нормах и методах, которые я рекомендую использовать для проведения уроков математики, ориентированных на мышление роста.

Глава 8. Оценка для мышления роста

Комплексный подход к математике, который используют дети, вызывает у меня восхищение. Ученики задают вопросы, визуализируют идеи, представляют задачи в графическом виде, обосновывают выбор методов и выстраивают цепочки рассуждений разными способами. Но в последние годы все эти тонкие и сложные особенности понимания математики сводятся к числам или буквам, по которым судят о том, чего стоит ученик. Учителей вынуждают проводить тесты и ставить оценки в нелепых и губительных масштабах; ученики начинают оценивать себя (и математику) в буквах и числах. Такое примитивное представление не только не позволяет правильно охарактеризовать знания детей, но и часто дает ложную картину.

В США ученики сдают так много тестов (особенно по математике), что это выходит за рамки разумного. Много лет уровень знаний учеников оценивается по узким, процедурным вопросам по математике с несколькими вариантами ответа. Навыки, нужные для сдачи таких тестов, весьма далеки от адаптивного, критического и аналитического мышления, которое необходимо в современном мире и во имя которого такие работодатели, как Google, объявили о том, что их больше не интересуют результаты тестирования учащихся, поскольку они не связаны с успешным выполнением задач на рабочем месте (Bryant, 2013).

Правильные тесты должны оценивать нечто важное. В США много десятилетий тесты оценивали то, что было легко проверить, а не ценные аспекты математики. Учителя вынуждены были преподавать узкую процедурную математику, а не широкую, творческую, развивающую, которая так важна в современном мире. Новая система оценки уровня знаний учеников предлагает другой подход, при котором тесты содержат мало вопросов с несколькими вариантами ответа на выбор и больше способов оценки навыков решения задач. Но такой подход встретил жесткое сопротивление родителей.

Ущерб, который наносит ученикам действующая система оценки знаний, не ограничивается стандартным тестированием. Учителя математики считают необходимым проводить на уроках тесты, которые имитируют стандартные тесты низкого качества, даже если осознают, что оцениваются в них узкие аспекты понимания математики. Учителя тем самым стремятся

подготовить учеников к успешной сдаче тестов в будущем. Некоторые, особенно учителя старших классов, проводят тесты каждую неделю или чаще. Регулярные тесты нужны им больше, чем учителям по другим предметам; как правило, они не учитывают негативную роль, которую тесты играют в формировании взглядов учеников на математику и самих себя. Многие знакомые мне учителя математики начинают учебный год или курс с теста, который подает ученикам сильный сигнал в отношении результатов в самом начале. А на самом деле важно подавать ученикам сигналы роста в отношении математики и обучения.

Финляндия — страна с одними из самых высоких в мире результатами международных тестов по математике, но там ученики не сдают никаких тестов в школе. Учителя используют глубокое понимание знаний учеников, полученное в процессе обучения, чтобы отчитаться перед родителями и составить мнение о выполненной работе. В ходе лонгитюдного исследования, которое я проводила в Англии, ученики работали над открытыми проектами на протяжении трех лет (с тринадцати до шестнадцати лет), после чего сдавали государственные стандартные экзамены. Они не сдавали тесты, им не ставили оценки на уроках. Они столкнулись с процедурами оценки уровня знаний с помощью коротких вопросов только за несколько недель до экзамена, когда учителя выдали им экзаменационные листы, которые необходимо было проработать. Несмотря на отсутствие навыков поиска ответов на экзаменационные вопросы или работы в условиях ограничения времени, эти ученики получили гораздо более высокие результаты по сравнению с группой учеников, которые провели эти три года, прорабатывая вопросы, аналогичные вопросам государственного экзамена, и часто сдавая тесты. Ученики школы, в которой большое внимание уделялось развитию навыков решения задач, хорошо сдали стандартный государственный экзамен, потому что их научили верить в свои способности; им дали полезную диагностическую информацию об их обучении, и они поняли, что могут найти ответ на любой вопрос, потому что умеют решать математические задачи.

В рамках своего научного исследования я получила доступ к ученическим работам (по экзаменам GCSE), которые экзаменационная комиссия в Англии держала за семью печатями. Она удовлетворила мою необычную просьбу, признав, что это принесет пользу развитию научного знания. Я провела целый день в затерявшейся среди кабинетов комнате без окон размером со шкаф, записывая и анализируя все результаты. Это было поучительно. Я обнаружила, что ученики, которые работали над

открытыми проектами, брались за существенно большее количество заданий, пытаясь решить их независимо от того, узнали ли они задачу или нет. Это важная и ценная практика, которую должны освоить все. Кроме того, эти ученики успешнее справлялись с вопросами, за которые брались, даже если это были вопросы на оценку знания стандартного метода, которому их не учили. Я разделила все вопросы на две категории — процедурные и концептуальные — и обнаружила, что ученики из двух школ получили одинаковые результаты по процедурным вопросам, которые подразумевали простое применение стандартных методов. Ученики школы, работающей на основе проектно-ориентированного подхода, добились гораздо более высоких результатов, отвечая на концептуальные вопросы, которые требуют размышлений. Тот факт, что ученики, которые не сдают тесты в школе, получили лучшие результаты, может показаться парадоксальным. Но новые исследования в области головного мозга и обучения легко его объясняют. Ученики, не имеющие опыта сдачи экзаменов и тестов, могут добиться лучших результатов, потому что обладают мышлением роста, уверены в своих способностях и владеют математическими инструментами для решения задач, которые они готовы применять в любой ситуации.

Современная система оценки очень плохо повлияла на учеников, и это влияние не ограничивается самим тестированием: выставление отметок имеет такой же негативный эффект. Когда ученикам ставят оценки, выраженные в процентах или баллах, им остается только сравнивать свои показатели с оценками других детей, причем половина учеников приходит к выводу, что они хуже остальных. Этот феномен известен как обратная связь, продиктованная эго: разновидность обратной связи, которая, как оказалось, вредит обучению. К сожалению, ученики начинают отождествлять себя с оценками. Они воспринимают баллы не как показатель их работы или того, что им необходимо для достижения успеха, а как показатель того, что они представляют собой как люди. Американские школьники часто говорят о себе «Я ученик уровня A» или «Я ученик уровня D», и это значит, что школьники меряют свою личность оценками. Рей Макдермотт написал очень интересную статью о том, как ребенок попадает в плен необучаемости. Там идет речь о том, как ученику, который размышлял и работал иначе, навесили ярлык, а затем определяли его сущность по этому ярлыку (McDermott, 1993). Я могла бы привести аналогичные аргументы по поводу того, как ученики попадают в плен оценок и баллов за тесты. Школьники называют себя учениками уровня A или D, поскольку выросли в культуре

достижений, где придавалось большое значение постоянному тестированию и оценкам, а не настойчивости, смелости и умению решать задачи. Традиционные методы оценки учеников, которые использовались в США десятки лет, были разработаны в менее просвещенную эпоху (Kohn, 2011), когда считалось, что оценки и баллы за тесты будут мотивировать учеников и дадут полезную информацию об успеваемости. Теперь мы знаем, что оценки и результаты тестов скорее лишают мотивации и подают ученикам губительные сигналы, которые приводят к снижению их успеваемости на уроках.

Изучая систему оценок и альтернативы ей, исследователи получали сопоставимые результаты. Многие работы показывают, что оценки снижают успеваемость учеников. Например, Мария Элавар и Лин Корно сравнили разные типы реакции учителей на домашние задания, когда половина учеников получали оценки, а другая — комментарии без них (Elawar & Corno, 1985). Ученики, получавшие комментарии, учились вдвое быстрее контрольной группы, разрыв в успеваемости между мальчиками и девочками исчез, а отношение к учебе улучшилось.

Рут Батлер сопоставила также результаты учеников, которым ставили оценки за работу в классе, с результатами тех, кто получал комментарии без оценок (Butler, 1987, 1988). Так же как и в ходе исследования, которое провели Корно и Элавар, ученики, получавшие комментарии, добивались гораздо больших успехов в учебе. Интересная особенность исследования Батлер состояла в том, что позже она добавила третий вариант — некоторым ученикам ставили оценки и давали комментарии (вроде бы лучшее сочетание вариантов). Но в ходе исследования было установлено, что ученики, которые получали только оценки, либо оценки и комментарии, показали одинаково плохие результаты (поскольку фокусировались на оценках), а существенно лучших добилась группа, которая получала только комментарии. Батлер обнаружила, что ученики пятых и шестых классов как с высокой (лучшие 25%), так и с низкой успеваемостью (худшие 25%) показывали слабые результативность и мотивацию в обоих группах с выставлением оценок, в отличие от учеников, которые получали только комментарии.

После исследования Батлер Каролин Палфри, Фабрицио Бутера и Селин Букс (Pulfrey, Butera, and Buchs, 2011) провели свое и получили схожий результат, снова продемонстрировав, что успеваемость и мотивация учеников, получавших оценки, и учеников, получавших оценки и комментарии, оказалась ниже успеваемости учеников, которые получали только комментарии. Кроме того, исследователи обнаружили, что ученикам достаточно

было *думать*, что они работают ради оценки, — и они уже теряли мотивацию, что приводило к снижению успеваемости.

Переход от оценок к комментариям — важный шаг, позволяющий учителям предложить ученикам удивительный дар: дар знаний и понимания путей совершенствования. Они вполне справедливо тревожатся о том, что такой подход может потребовать больше времени: ведь хорошие учителя всегда уделяют работе гораздо больше времени, чем те часы, за которые им платят. Рекомендую такое решение: меньше заниматься оценкой уровня знаний. Заменив еженедельное выставление оценок периодическими комментариями, учителя могли бы сэкономить время, исключить сигналы об оценках, способствующие укреплению установок на данность, и дать ученикам глубокое понимание предмета, которое поспособствует повышению успеваемости. Чуть ниже приведены отзывы разных учителей, с которыми я работала и которым удалось изменить систему оценки знаний, не вкладывая в это больше времени. Они рассказывают о своей работе и о том, какое влияние она оказала на их учеников.

Гонка в никуда

«Гонка в никуда» — документальный фильм, в котором показано, какой стресс испытывают ученики американских школ. Он вышел в прокат несколько лет назад и получил широкое внимание и признание: в New York Times, например, назвали его обязательным к просмотру. Вскоре после выхода фильм собирал полные залы зрителей в кинотеатрах и школьных залах по всей стране. В нем показано губительное влияние тестов, оценок, домашних заданий и чрезмерной загруженности на здоровье и благополучие учеников. Кампания, развернувшаяся после выхода этого фильма, получила поддержку десятков тысяч педагогов и родителей. Во время просмотра этого фильма я видела, что математика — главный источник стресса и тревог учеников. В нем рассказывается грустная история об одной ученице старшей школы по имени Девон Марвин, которая всегда успешно справлялась с математикой. Это была очень мотивированная девочка, которая воспринимала математику как часть своей личности. Но однажды она получила за тест по математике оценку F и покончила с собой. Для Девон, как и для многих других учеников, оценка по математике означала сигнал не о том, над какой областью ей необходимо поработать на пути к обучению, ориентированному на рост, а о том, что она

представляет собой как личность: теперь она стала «ученицей уровня F». Эта мысль оказалась настолько тяжелой для Девон, что она совершила самоубийство.

Оценивая уровень знаний учеников, мы создаем важную возможность. Умело составленные задачи и вопросы в сочетании с четкой обратной связью открывают перед учениками путь к формированию мышления роста, который помогает им понять, что они могут добиться самых высоких результатов в учебе и, что очень важно, как это сделать. К сожалению, большинство систем оценки в школах США делают нечто прямо противоположное, предоставляя ученикам информацию, под влиянием которой многие из них считают себя неудачниками, не способными заниматься математикой. В последние годы я работала с учителями, которые отошли от стандартных тестов с отметками и баллами к оценке, сфокусированной на предоставлении информации, необходимой для успешной учебы, в сочетании с сигналами, ориентированными на мышление роста. Это кардинально изменило атмосферу на уроках. Тревога в связи с математикой, которая раньше была обычным явлением среди учеников, уступила место уверенности в своих силах. Это привело к повышению уровня мотивации, вовлеченности и успеваемости. В этой главе я расскажу о некоторых изменениях, которые необходимо предпринять на уроках, чтобы заменить тестирование, ориентированное на фиксированное мышление, системой оценки, которая ориентирована на мышление роста и расширяет возможности учащихся.

Режиссер фильма «Гонка в никуда» Вики Абелес сняла продолжение под названием «Сверх меры». В процессе работы над фильмом и во время интервью с учениками и родителями из всех уголков США она поняла, что математика — предмет, который больше всего нуждается в переменах и больше, чем другие дисциплины, убивает мечты учеников о колледже и даже окончании средней школы. Именно поэтому Вики посвятила весь новый фильм проблемам в сфере математики. В этом фильме рассказывается о работе, которую на протяжении последних нескольких лет я вела с учителями в школьном округе с очень слабыми результатами по математике. В школьном округе Виста в Сан-Диего, как и во многих других городских районах США, более половины учеников не справлялись с алгеброй, после чего попадали в порочный круг неудач. Но неудачи в математике не ограничиваются самой этой дисциплиной. Количество учеников, которые оканчивают среднюю школу по так называемой программе A — G (включающей в себя обязательные курсы старшей школы), или программе готовности к колледжу,

составляет всего 24%. К счастью, в школьном округе Виста работали такие инноваторы, как инспектор Девин Водичка и руководитель направления математики Кэти Уильямс. Они знали о необходимости изменений и были готовы потратить на них время и энергию. Весь следующий год я работала с учителями всех средних школ этого округа над повышением их профессионального уровня в таких областях, как способы эффективного преподавания математики, разделение на группы для достижения успеха и оценка с ориентацией на мышление роста.

Руководитель направления математики этого школьного округа Кэти Уильямс приняла решение о том, что все учителя средних школ округа должны будут работать со мной год, хотят они того или нет. Когда я впервые встретилась с этой группой учителей, у них были разные уровни мотивации к переменам. Я до сих пор помню Фрэнка — человека в возрасте, близком к пенсионному, — не собиравшегося менять модель преподавания, которую он применял на протяжении всей своей трудовой жизни. На нескольких первых занятиях он не проявлял особого энтузиазма. Но постепенно он проникся воодушевлением других учителей и начал понимать важность исследований, о которых я рассказывала. В итоге Фрэнк осознал, что может дать своим ученикам иное, лучшее будущее в математике. Я до сих пор хорошо помню занятие в конце года, когда он ворвался в аудиторию с эмоциональным рассказом, как он вместе с женой все выходные рисовал график на куске ткани во всю стену и каким замечательным был урок математики, на котором он предложил ученикам пройти вдоль него, чтобы понять смысл представленных на нем соотношений. И такое воодушевление появлялось у всех учителей, когда они применяли новые идеи в работе со своими учениками и видели, как повышается их вовлеченность.

Я решительно выступаю в поддержку учителей и знаю, что эпоха закона «Ни одного отстающего» лишила многих из них профессионализма и энтузиазма, поскольку их вынуждали (я специально выбрала именно это слово) использовать методы, которые, как им было хорошо известно, не принесут пользы. Сейчас важная часть моей работы с учителями сводится к тому, чтобы помочь им вернуть чувство профессионализма. Во время занятий по профессиональному развитию, которые я проводила в школьном округе Виста, учителя начинали снова считать себя творцами, способными сформировать среду обучения, наполненную их идеями по поводу творческой, увлекательной математики. Это приносит учителям гораздо большее

удовлетворение, поэтому я призываю всех, с кем я работаю, придерживаться именно такого подхода. Я видела, как учителя оживают. Каждый день, который мы проводили вместе, аудитория все больше наполнялась энергией. За год учителя перешли от математики в виде листов с заданиями к математике, основанной на изысканиях; они отказались от деления учеников на группы по успеваемости, получив возможность объяснить всем, что они могут добиться больших успехов в математике. Кроме того, эти учителя стали оценивать работу учеников не с установкой на данность, а с установкой на рост. Такие перемены происходили со многими учителями, с которыми я работала. Для этого нужно относиться к ним как к профессионалам и предлагать использовать свои суждения в сочетании с идеями научных исследований, чтобы обеспечить ученикам положительный опыт обучения и оценки.

В своем новом фильме Вики Абелес и члены ее команды берут интервью у некоторых учеников средней школы школьного округа Виста. Дети рассказывают об изменениях, произошедших в их классах после года обучения учителей на курсах профессионального развития. Одна девочка по имени Делия рассказала о том, как годом ранее получила оценку F за домашнюю работу и из-за этого прекратила дальнейшие попытки чего-то добиться на уроках математики и, как ни странно, на всех остальных уроках в школе. Во время интервью она трогательно говорит: «Увидев F, я почувствовала себя пустым местом. Я не справлялась с предметом, поэтому подумала, что могу провалиться и в других. Я даже не пыталась». Через какое-то время в фильме Делия рассказывает о переменах на уроках математики, а также о том, что теперь она испытывает воодушевление по поводу возможности добиться успеха. «Я ненавидела математику, — говорит она. — Я сильно ее ненавидела, но теперь у меня есть связь с ней, я открыта, я чувствую себя живой, у меня больше энергии».

Тот факт, что Делия использует слово «открытый» в описании своих чувств к математике, перекликается с тем, что я часто слышу от учеников, когда они осваивают математику без неизбежного страха низких оценок. Но дело не только в оценивании. Когда мы преподаем творческую, исследовательскую математику, ученики испытывают сильное ощущение интеллектуальной свободы. Во время интервью с третьеклассниками, которые принимали участие в разговорах о числах на уроках математики (глава 4), я спрашивала, какие чувства вызывают у них разговоры о числах. Ученик по имени Дилан начал так: «Я чувствую себя свободным». Затем он

рассказал о том, как оценка различных математических стратегий позволила ему почувствовать, что он может заниматься математикой так, как пожелает, исследовать разные идеи и узнавать что-то новое о числах. Тот факт, что ученики используют слова «свободный» и «открытый», демонстрирует, как важно то, что они занимаются математикой, ориентированной на мышление роста. Значение такого подхода выходит за рамки успеваемости по математике и распространяется на расширение интеллектуального потенциала учеников, которое будет влиять на них на протяжении всей жизни (Boaler, 2015a).

Представления о собственном потенциале, которые формируются у учеников, влияют на их успеваемость и, что не менее важно, на их мотивацию и старание. Именно об этом говорит Делия в фильме. Получив неудовлетворительную оценку по математике, она поставила крест не только на этой дисциплине, но и на остальных предметах, поскольку чувствовала себя неудачницей. Такая реакция — далеко не редкость. Когда ученикам ставят баллы, которые говорят им о том, что у них более низкий рейтинг по сравнению с остальными, они разочаровываются в школе, приходят к выводу, что так и не смогут ничему научиться, и у них формируется комплекс отстающего. Оценки и баллы, которые выставляют ученикам с высокой успеваемостью, наносят такой же вред. Эти дети начинают думать, что относятся к числу «учеников уровня А», и становятся на сомнительный путь обучения с установкой на данность, который вынуждает их избегать трудной работы или сложных задач из страха потерять свой статус. Такие ученики часто приходят в отчаяние, получая оценку В или ниже за любую свою работу.

После недавней презентации перед учителями о влиянии оценок один опытный преподаватель старших классов средней школы подошел поговорить со мной. Он сказал, что работает в старшей школе уже более 20 лет и ставил ученикам оценки вплоть до прошлого года. Он поведал, что такое изменение оказало исключительное влияние на учеников: весь класс превратился в открытое учебное пространство, в котором подростки работают более усердно и добиваются более высоких результатов. Учитель также отметил, что вместо оценок использует систему, в соответствии с которой ученики должны решить как можно больше задач. Когда дети доходили до трудных задач, которые они не могли решить, учитель предлагал им нарисовать линию поперек страницы и решить оставшиеся задачи с помощью учебника. По завершении работы над заданиями ученики вместе обсуждали задания, которые

оказались под чертой. Этот учитель сказал, что такая система оценки, которая подавала ученикам замечательные сигналы, ориентированные на мышление роста, дает ему лучшую информацию о математике, которую он преподает, обеспечивая быстрый и легкий способ определить, с какими трудностями столкнулись ученики и что должно стать темой обсуждения на уроке.

В ходе еще одного исследования об оценках Мэтт Диверс обнаружил, что ученики, которым вместо оценок и баллов дают позитивную и конструктивную обратную связь, добиваются более высоких успехов в работе в будущем (Deevers, 2006). К сожалению, он обнаружил также, что чем старше ученики, тем меньше конструктивной обратной связи предоставляют им учителя и тем чаще прибегают к оценкам. Диверс нашел явную и вполне ожидаемую связь между методами оценивания, которые использует учитель, и убеждениями учеников. Причем уровень уверенности учеников в своем потенциале и возможности улучшения результатов неуклонно снижался с шестого по двенадцатый класс (Deevers, 2006). Традиционная культура оценки знаний в старших классах, свойственная учителям математики, убежденным в том, что они должны часто проводить тесты, ориентированные на фиксированное мышление, и выставлять отметки, доминировала на протяжении десятилетий. Именно поэтому мне было особенно приятно услышать историю опытного учителя, который изменил свой подход к преподаванию, создал «открытые» уроки и сразу увидел изменения в мотивации и результатах учеников.

Необходимо, чтобы ученики испытывали воодушевление и интерес к обучению. Тогда их мотивация и успеваемость повысятся. Существует много исследований, посвященных двум типам мотивации. Внутренняя проистекает из интереса к предмету и концепциям, которые вы изучаете; внешнюю обеспечивают мысли о получении более высоких баллов. Поскольку математику десятилетиями преподавали как предмет, ориентированный на результат, самыми мотивированными учениками на уроках являются, как правило, ученики с внешней мотивацией. Один из результатов заключается в том, что высокие оценки и баллы обычно получают именно те, кто позитивно настроен по отношению к математике. Большинство учителей, которые верят в оценки, используют их, убежденные в том, что они мотивируют учеников. Некоторых они и правда мотивируют (тех, кто в любом случае получил бы высокие оценки), но при этом лишают мотивации остальных. К сожалению, внешняя мотивация сильных учеников не приносит пользы в долгосрочной

перспективе. Многочисленные исследования показывают, что ученики, у которых формируется внутренняя мотивация, добиваются более высоких результатов, чем ученики с внешней мотивацией (Pulfrey, Buchs, & Butera, 2011; Lemos & Veríssimo, 2014), а также что внутренняя мотивация побуждает учеников изучать различные дисциплины на более высоком уровне и продолжать заниматься ими (Stipek, 1993).

Я увидела разницу в последствиях внутренней и внешней мотивации на примере своей дочери, когда она перешла в пятый класс. Моя дочь училась в местной начальной школе, где не ставились оценки и было мало тестов, поэтому до пятого класса она получала только обратную связь по поводу своей работы, благодаря чему у нее была замечательная внутренняя мотивация, за формированием которой я наблюдала, когда она приходила домой и с восторгом рассказывала обо всем, что изучает в школе. В пятом классе у нее был очень квалифицированный учитель, который использовал на уроках содержательные и увлекательные виды деятельности, но выставлял ученикам оценки за всю их работу. Этот учитель сказал мне, что делает это потому, что в местных средних школах оценки выставляются за все и он хочет подготовить детей к этому. Элфи Кон описывает такой подход как BGUTI — better get used to it («к этому надо привыкнуть»). Практика, которая наносит вред ученикам, применяется в школах потому, что, по мнению учителей, ученики непременно столкнутся с такой практикой и надо, чтобы они были готовы к этому. За учебный год пятого класса я увидела очень серьезные перемены в своей дочери, которая внезапно начала заботиться (и беспокоиться) только об оценках. Она перестала уделять внимание концепциям, которые изучала, и постоянно беспокоилась по поводу отметки, которую может получить за свою работу. Элфи Кон (Kohn, 2011) приводит высказывание ученицы Клер, которая описывает аналогичные перемены.

> Я помню, как в моей письменной работе впервые появился раздел для оценки… Внезапно вся радость исчезла. Я писала только ради оценки — я больше не исследовала ничего для себя. Я хочу вернуть всё. Будет ли когда-нибудь всё как раньше?

По словам Клер, она утратила ощущение поиска и радости. В случае моей дочери все закончилось хорошо, поскольку в шестом классе она перешла в школу, где не ставили оценок, и снова начала проявлять интерес к учебе. Однако со многими другими этого не происходит, и они проходят программу средней школы, получая все больше оценок и чувствуя себя все менее

мотивированными концепциями, которые они изучают.

В моей книге «При чем тут математика?» подробнее рассматривается тема вреда, который наносят оценки и тестирование ученикам всех уровней, а результаты исследований подтверждают негативное влияние такого подхода (Boaler, 2015a). Рекомендую также прочесть очень интересные статьи и книги Элфи Кона о влиянии традиционных методов оценки (Kohn, 1999, 2000). Ниже я сфокусируюсь на способах оценки учеников с ориентацией на рост, предоставляя им информацию и подавая сигналы о мышлении роста, которые помогут им встать на осознанный и позитивный путь к успеху. Это одно из самых важных изменений, которые учитель может предпринять на своих уроках.

Оценка для обучения

Несколько лет назад два профессора из Англии, Пол Блэк и Дилан Уильям, провели метаанализ результатов сотен научных исследований по теме оценки учеников. Они обнаружили нечто поразительное: настолько эффективную форму оценки, что, если бы все учителя начали применять ее, это повысило бы в стране успеваемость, измеряемую в ходе международных исследований, со среднего уровня до одного из первых пяти мест в рейтинге. (Сэр Пол Блэк и профессор Дилан Уильям были моими коллегами в Лондонском университете; Пол Блэк был также моим научным руководителем и наставником.) Блэк и Уильям установили: если бы учителя применяли метод, получивший название «оценка для обучения», это оказало бы гораздо большее положительное влияние по сравнению с другими инициативами в области образования, такими как сокращение численности учеников в классах (Black, Harrison, Lee, Marshall, & Wiliam, 2002; Black & Wiliam, 1998a, 1998b). Блэк и Уильям опубликовали свои выводы в небольшой брошюре, которая разошлась в Англии тиражом 20 тысяч экземпляров за первые несколько недель. Сейчас оценка для обучения получила во многих странах статус инициативы государственного уровня; этот метод опирается на огромную базу результатов научных исследований и доносит до учеников сигналы о мышлении роста.

Думаю, полезно привести здесь вводную информацию по теме. Существует два типа оценки — формативная и суммативная. Первая предоставляет информацию о протекании процесса обучения и представляет собой основу оценки для обучения. Она позволяет выяснить, на каком этапе находятся

ученики, чтобы учителя и они сами могли определить, что им изучать далее. А цель суммативной оценки заключается в том, чтобы подвести итоги — составить заключительное мнение о достижениях учеников на конечном этапе обучения. Однако в США есть одна проблема: многие учителя используют суммативное оценивание в формативном режиме, выставляя итоговый балл или оценку еще в процессе изучения материала. На уроках математики учителя часто используют суммативные тесты раз в неделю, а затем переходят к следующей теме, не дожидаясь результатов. В случае оценки для обучения ученики осведомлены о том, что они уже знают, что им необходимо узнать и как преодолеть разрыв между этими двумя пунктами. Подросткам дают информацию об их способах обучения, ориентированных на данность и на рост, что способствует формированию математического мышления роста.

В период прохождения определенного курса очень важна формативная, а не суммативная оценка знаний учеников. Кроме того, подход оценки для обучения, который можно также считать оценкой для мышления роста, предлагает ряд стратегий и методов.

Один из важных принципов оценки для обучения состоит в том, что такой подход возлагает на учеников ответственность за их обучение. По сути, оценка для обучения сводится к предоставлению учащимся возможности стать самостоятельными, самим регулировать учебный процесс и определять, что им необходимо изучить в первую очередь, а также знать, как улучшить свои показатели. Оценку для обучения можно рассматривать как процесс, состоящий из трех частей: предоставление детям четкой информации о том, что они изучили; помощь ученикам в осознании того, где они сейчас и где должны быть; информирование учеников о способах преодоления разрыва между тем, где они есть и где должны быть (рис. 8.1).

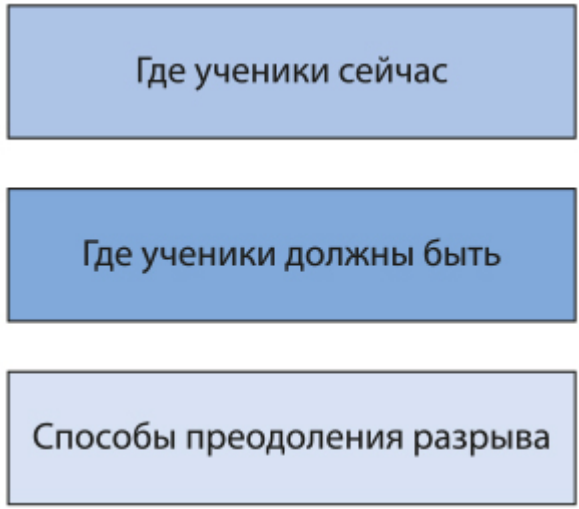


Рис. 8.1. Оценка для обучения

Этот подход обозначается термином *оценка для обучения*, а не *оценка обучения*: информация, которую получают учителя и ученики благодаря ему, позволяет учителям сделать свое преподавание более эффективным и помогает ученикам работать с полной отдачей. Учителя, которые используют оценку для обучения, тратят меньше времени на то, чтобы рассказывать ученикам об их успеваемости, и уделяют больше времени созданию возможностей для того, чтобы дети взяли обучение под свой контроль. Учитель из Англии, который начал использовать этот метод, сказал, что это заставило его меньше сосредоточиваться на себе и больше на детях (Black et al., 2002). Он укрепил уверенность в себе как в учителе благодаря эффективным стратегиям создания возможностей для того, чтобы ученики сами продвигали вперед свое обучение.

Развитие самосознания и ответственности учеников

Самые сильные ученики — те, которые склонны к размышлениям, занимаются метапознанием (размышляют о том, что знают) и берут обучение под свой контроль (White & Frederiksen, 1998). У традиционных уроков математики есть один серьезный недостаток: ученики редко знают, что они изучают и где находятся в более широком контексте. Они сосредоточены на методах, которые им необходимо запомнить, но зачастую даже не знают, над какой областью работают. Я неоднократно присутствовала на уроках математики и часто останавливалась

возле парт учеников, чтобы спросить их, над чем они работают. Часто ученики просто называют задание. Многие из моих диалогов с ними выглядели примерно так.

Дж. Б.: Над чем вы работаете?
Ученик: Над упражнением 2.
Дж. Б.: Так что же вы делаете на самом деле? Какой материал изучаете?
Ученик: Ой, извините, это вопрос 4.

Научное исследование, которое провели Барбара Уайт и Джон Фредериксен (White & Frederiksen, 1998), убедительно продемонстрировало важность размышлений. Эти исследователи изучили учеников 12 седьмых классов, изучающих физику. Они разделили учеников на экспериментальные и контрольные группы. Все изучали тему «Сила и движение». Ученики контрольных групп уделяли часть каждого урока обсуждению этой работы, а ученики экспериментальных групп на уроках занимались самооценкой и взаимным оцениванием в соответствии с критериями той дисциплины, которую изучали. Результаты исследования оказались весьма неожиданными. Ученики, у которых раньше была низкая успеваемость, добились самых больших успехов. Уделив какое-то время анализу профильных критериев и оценке своей работы в соответствии с ними, они начали добиваться таких же результатов, что и ученики с высоким уровнем успеваемости. Ученики средних классов получили даже более высокие результаты тестирования по курсу физики старшей школы, чем ученики, которые прошли углубленный курс физики. Исследователи пришли к выводу, что низкая успеваемость объясняется скорее не отсутствием у учеников соответствующих способностей, а тем, что раньше они просто не знали, на что им обращать внимание.

К сожалению, это касается многих. Крайне важно довести до сведения учеников, что именно им следует изучать. С одной стороны, это помогает им понять, что такое успех, а с другой — запускает процесс самоанализа, который оказывается бесценным инструментом обучения.

1. Самооценка

Самооценка и взаимная оценка — две основные стратегии, позволяющие ученикам повысить свою осведомленность о том, какую тему они изучают, а также о более широких путях ее исследования. В случае самооценки ученикам дают четкие утверждения по теме, которые они используют для размышлений о том, что они уже изучили и над чем им еще нужно поработать.

Такие утверждения должны иметь математическое содержание, например: «Я понимаю разницу между средним и медианным значением и когда каждое из них следует использовать», а также описывать методы работы, например: «Я научился проявлять настойчивость в решении задач и продолжаю работать, даже если задачи трудные». Если ученики начинают каждый раздел работы с четких утверждений об изучаемой теме, они фокусируются на более широком контексте: узнают, что важно, над чем нужно поработать, чтобы улучшить свои знания. Исследования свидетельствуют: когда ученикам предлагают оценить свой уровень понимания, они не завышают и не занижают его (Black et al., 2002).

Самооценку можно проводить на разных уровнях детализации. Учителя могут использовать в листах самооценки критерии, охватывающие урок или более длительный период, например учебный модуль, четверть и полугодие. Ниже приведены примеры критериев самооценки за более короткий и более длинный промежутки. Помимо них, ученикам необходимо предоставить время для размышлений о своем обучении, что они могут сделать во время урока, в конце урока или даже дома.

Лист самооценки из примера 8.1 предоставлен Лори Мэллет, замечательной учительницей третьего класса, с которой я работала. Лори принимала участие в летнем семинаре по профессиональному развитию, который я проводила и на котором мы рассматривали все способы стимулирования мышления роста. Она предлагает ученикам три варианта выбора.

ПРИМЕР 8.1. САМООЦЕНКА: МНОГОУГОЛЬНИКИ

	Я могу сделать это самостоятельно и объяснить свой способ(ы) решения однокласснику или учителю	Я могу сделать это самостоятельно	Мне нужно больше времени. Мне необходимо видеть пример, который поможет мне
Нарисовать прямые и отрезки с заданными параметрами			
Нарисовать параллельные прямые и отрезки			
Нарисовать пересекающиеся прямые и отрезки			
Построить многоугольник с заданным периметром			
Построить квадрат или прямоугольник с заданной площадью			
Построить неправильную фигуру, площадь которой можно найти, разделив фигуру на прямоугольники или квадраты			

Вместо утверждений, над которыми должны размышлять ученики, некоторые учителя (особенно те, которые учат детей младшего возраста) используют смайлики вроде тех, которые показаны на рис. 8.2.

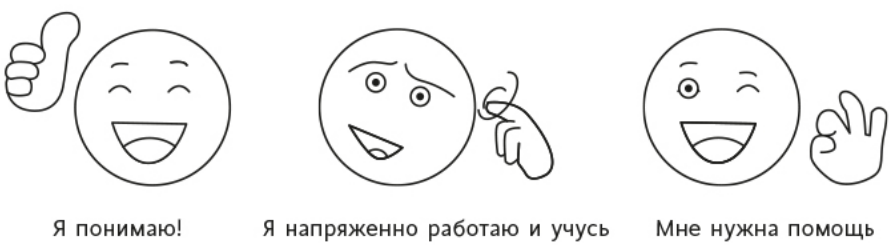


Рис. 8.2. Смайлики для самоанализа

Оба варианта побуждают учеников подумать о том, что они уже изучили и что им нужно изучить.

Второй пример предоставила Лиза Хенри, опытный учитель старшей школы из Брукленда. Лиза преподает математику в старших классах уже 23 года. Четыре года назад она разочаровалась в системе оценок. Она знала, что ее оценки не отражают реальный уровень знаний учеников. Лиза перешла к оценке знаний по критериям, о которых она рассказала ученикам. Лиза любезно делится со всеми желающими теми утверждениями

для самооценки, которые она составила для всего курса алгебры (пример 8.2). Ученики оценивают себя по этим критериям, а Лиза определяет, что они знают, а что нет, вместо того чтобы выставлять общую оценку. Лиза говорит, что теперь ей известно гораздо больше о знаниях и понимании учеников.

ПРИМЕР 8.2. АЛГЕБРА 1. САМООЦЕНКА

Раздел 1 — линейные уравнения и неравенства

- Я могу решить линейное уравнение с одной переменной.
- Я могу решить линейное неравенство с одной переменной.
- Я могу найти формулы для указанной переменной.
- Я могу решить уравнение с модулем с одной переменной.
- Я могу решить составное неравенство с одной переменной и представить его графическое решение.
- Я могу решить неравенство с модулем с одной переменной.

Раздел 2 — интерпретация взаимосвязей в математических выражениях

- Я могу использовать и интерпретировать те или иные компоненты математических формул.
- Я могу преобразовывать компоненты формул.
- Я могу определить, что собой представляет любая часть математического выражения.
- Я могу составить уравнение или неравенство с одной переменной, которое лучше всего описывает задачу.
- Я могу составить уравнение с двумя переменными, которое лучше всего описывает задачу.
- Я могу определить те значения, которые удовлетворяют уравнению, и обосновать свой выбор.
- Я могу использовать полученное решение в описываемой реальной задаче и обосновать свой выбор.
- Я могу построить график уравнения в системе координат с нужными обозначениями и в нужном масштабе.
- Я могу доказать, что любая точка на графике удовлетворяет уравнению, если в него подставить ее

координаты.

• Я могу сравнить свойства двух функций, заданных графически, таблично или аналитически.

Раздел 3 — понимание функций

• Я могу определить, представляет ли функцию график, таблица или набор упорядоченных пар.

• Я могу расшифровать запись функции и объяснить, как аргумент согласуется с ее значением.

• Я могу преобразовать список чисел (последовательность) в функцию, сделав целые числа аргументами, а элементы последовательности — значениями функции.

• Я могу выявить основные свойства графика: отрезки, отсекаемые на координатных осях, возрастание или убывание функции, максимальное и минимальное значения и поведение функции на границах области определения, с помощью графика, таблицы или уравнения.

• Я могу объяснить, как график отображает область значений функции.

Раздел 4 — линейные функции

• Я могу вычислить и интерпретировать среднюю скорость изменения функции.

• Я могу построить график линейной функции и определить отрезки, отсекаемые на координатных осях.

• Я могу построить график линейного уравнения на координатной плоскости.

• Я могу продемонстрировать, что линейная функция имеет постоянную скорость изменения.

• Я могу найти ситуации, которые отображают одинаковую скорость изменения за равные промежутки и могут быть смоделированы с помощью линейных функций.

• Я могу построить линейную функцию на основе арифметической последовательности, графика, таблицы значений или описания соотношения.

• Я могу объяснить (с использованием подходящих единиц) значение таких понятий, как угол наклона прямой, отрезок, отсекаемый на оси *y*, а также другие точки на прямой, когда она моделирует реальное соотношение.

Раздел 5 — системы линейных уравнений и неравенств

• Я могу решить систему линейных уравнений графически.

• Я могу решить систему линейных уравнений методом подстановки.

• Я могу решить систему линейных уравнений методом исключения неизвестных.

• Я могу решить систему линейных неравенств графически.

• Я могу составить и представить в графическом виде набор ограничений для задачи линейного программирования и найти максимальное и (или) минимальное значение.

Раздел 6 — статистические модели

• Я могу описать центр распределения данных (среднее значение или медиану).

• Я могу описать разброс данных (межквартильный диапазон или среднеквадратичное отклонение).

• Я могу представить данные в виде диаграмм с числовой осью (точечных диаграмм, гистограмм и диаграмм размаха).

• Я могу сравнить распределение двух или более множеств данных, проанализировав их форму, центр и разброс, когда они нанесены на одну и ту же шкалу.

• Я могу интерпретировать особенности формы, центра и разброса множества данных в контексте задачи, а также объяснить влияние экстремумов.

• Я могу прочесть и интерпретировать данные, представленные в двумерной таблице плотности распределения.

• Я могу интерпретировать и объяснить значения относительной частоты событий в контексте задачи.

• Я могу построить диаграмму разброса данных, нарисовать линию наилучшего приближения и составить уравнение этой линии.

• Я могу использовать функцию наилучшего приближения для составления прогнозов.

• Я могу проанализировать график остатков, чтобы определить, обеспечивает ли функция приемлемое приближение.

• Я могу вычислить (с помощью разных методов) и интерпретировать коэффициент корреляции.

• Я могу определить, что корреляция не подразумевает наличия причинно-следственной связи и что причинно-следственная связь не отражена на диаграмме разброса.

Раздел 7 — многочлены и функции

• Я могу складывать и вычитать многочлены.

• Я могу умножать многочлен на многочлен.

• Я могу разложить многочлен на множители.

• Я могу решать квадратные уравнения методом разложения на множители.

• Я могу построить приближенный график с помощью точек пересечения квадратичной функции с осями координат и других легко определяемых точек.

Раздел 8 — квадратичные функции

• Я могу найти координаты экстремума квадратичной функции, дополнив ее выражение до полного квадрата.

• Я могу построить график квадратичной функции, определив основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значение, симметрия и поведение графика функции на границах области определения.

• Я могу определить, как влияет на график функции то или иное преобразование ее формулы.

• Я могу построить диаграмму рассеяния, используя метод наименьших квадратов, и применить его для составления прогнозов.

Раздел 9 — квадратные уравнения

• Я могу объяснить, почему суммы и произведения либо рациональные, либо иррациональные.

• Я могу решать квадратные уравнения методом дополнения до полного квадрата.

• Я могу решать квадратные уравнения методом нахождения квадратных корней.

• Я могу решать квадратные уравнения с помощью формулы определения корней квадратного уравнения.

Раздел 10 — нелинейные соотношения

• Я могу применить свойства степенных функций, чтобы упростить алгебраические выражения с рациональными показателями степени.

• Я могу построить график степенной функции с показателем степени $^1/_2$ или $^1/_3$, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения и поведение графика функции на границах области определения.

• Я могу построить график кусочно-ломаной функции, в том числе ступенчатой и функции модуля, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения и поведение графика функции на границах области определения.

Раздел 11 — показательные функции и уравнения

• Я могу показать, что показательная функция имеет один и тот же множитель при равных интервалах изменения переменной.

• Я могу указать случаи, когда изменение скорости описывается одним и тем же множителем за равные промежутки времени и которые могут быть описаны с помощью показательных функций.

• Я могу использовать графики или таблицы, чтобы сравнить скорость изменения линейной, квадратичной и показательной функций.

• Я могу преобразовать показательную функцию, используя ее свойства.

• Я могу использовать параметры показательной функции, взятые из реальной жизни.

• Я могу построить график показательной функции, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения, асимптоты и поведение функции на границах области ее определения.

• Я могу построить диаграмму рассеяния, используя показательную функцию в методе наилучшего приближения, и применить ее для составления прогнозов.

Источник: предоставлено Лизой Хенри.

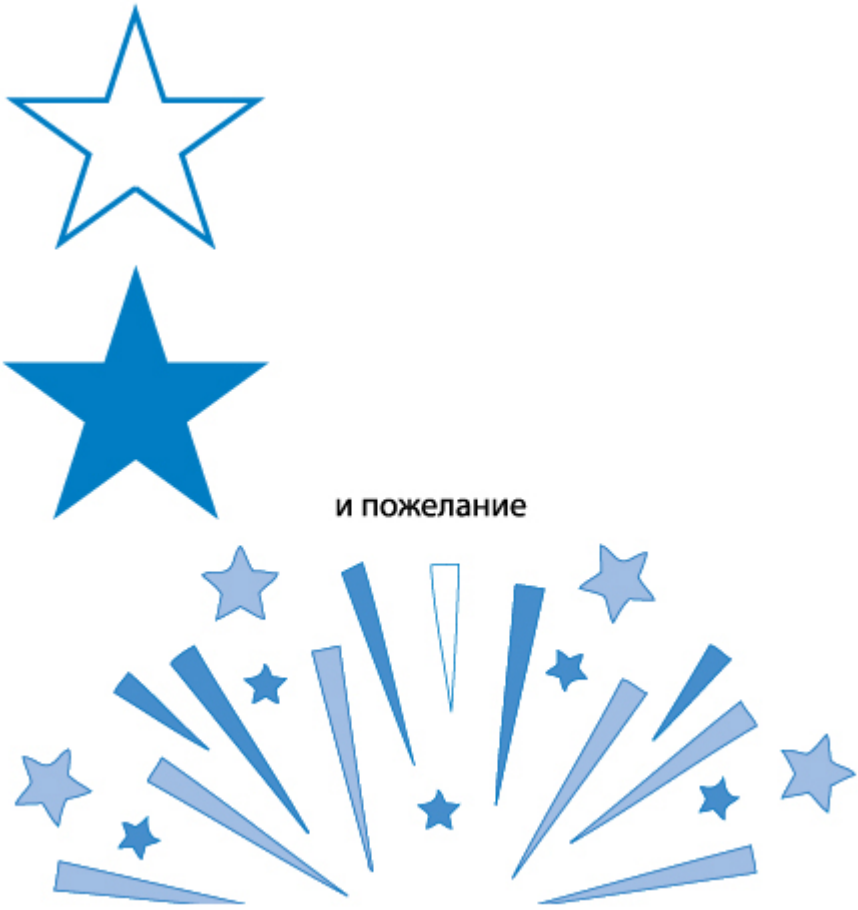
2. Взаимооценивание

Взаимооценивание — это стратегия, аналогичная самооценке, которая также подразумевает предоставление ученикам четких критериев, но для оценки работы друг друга, а не своей.

Оценивая работу знакомого, ученики получают дополнительную возможность для осмысления материала по математике, который им необходимо изучить. Как показала практика, взаимооценивание оказалось весьма эффективным, отчасти потому, что ученики часто гораздо больше открыты для критических замечаний или предложений о внесении изменений от других учеников; кроме того, ровесники обычно используют способ коммуникации, благодаря которому им легче понимать друг друга.

Один из моих любимых методов взаимооценивания — «две звезды и пожелание» (пример 8.3). Ученикам предлагают проанализировать работу одноклассников и с помощью определенных критериев или без них выбрать два фрагмента этой работы, выполненные хорошо, и один, который необходимо улучшить.

ПРИМЕР 8.3. ДВЕ ЗВЕЗДЫ И ПОЖЕЛАНИЕ



Когда ученикам предоставляют информацию, которая позволяет им составить четкое представление о том, что они изучают, и когда им с небольшими интервалами предлагают поразмышлять над своими результатами, у них формируется ответственность за свое обучение. Некоторые называют это приглашением в круг посвященных — предоставлением ученикам мощного знания (которым обычно обладают только учителя), которое позволяет им нести ответственность за свое обучение и добиваться успеха.

3. Время для размышлений

Один из эффективных способов повышения осведомленности учеников об изучаемых концепциях состоит в том, чтобы предоставить им время для размышлений во время занятий. В конце урока предложите им поразмышлять, воспользовавшись такими вопросами, как в примере 8.4.

ПРИМЕР 8.4. РАЗМЫШЛЕНИЯ

Интересная концепция

Над какой интересной концепцией мы работали сегодня?

Что я узнал сегодня?

Какие хорошие идеи появились у меня сегодня?

В каких ситуациях я мог бы использовать полученные сегодня знания?

Какие вопросы у меня есть по поводу сегодняшней работы?

Какие новые идеи появились у меня под влиянием этого урока?

4. Светофор

Этот вид работы в классе стимулирует учеников к размышлениям и дает учителям важную информацию. Есть много разных ее вариантов, но все они подразумевают, что ученики должны использовать красный, желтый и зеленый цвета, чтобы обозначить, понимают ли они тот или иной материал полностью, частично или им необходимо больше поработать над ним. Некоторые учителя раздают цветные бумажные стаканчики: их ученики ставят на парты во время урока. Ученики, которым необходимо, чтобы учитель остановился возле них и просмотрел их работу, ставят на стол красный стаканчик; те, кто считает, что урок проходит слишком быстро, используют желтый. Учителя могут предложить и другие варианты. Сперва некоторые ученики неохотно выставляли стаканчики, но когда поняли, какую пользу это им приносит, начали охотно использовать их. Некоторые учителя предлагают ученикам, на столах которых стоят зеленые стаканчики, объяснить изучаемую концепцию остальным. Это приносит огромную пользу как ученикам, так и учителям: учителя получают обратную связь о своем преподавании в реальном времени, а не в конце модуля или фрагмента работы, когда уже слишком поздно что-то предпринимать. Вместо бумажных стаканчиков можно использовать ламинированные кусочки цветной бумаги, пробив в них отверстия, чтобы их можно

было повесить на кольцо.

5. Мозаичные группы

В мозаичных группах ученики работают вместе, чтобы стать экспертами по определенному явлению, новому методу или интересному материалу. Затем группы делятся на части и формируются новые группы, чтобы участники каждой были экспертами в определенной области. После этого члены группы могут обучить друг друга тому, что узнали сами, работая в качестве экспертов. Здесь необходимы минимум четыре области экспертных знаний, чтобы, когда члены группы перейдут в другие группы, все они могли научить друг друга чему-то новому. Класс из 32 учеников, разделенных на восемь групп, может работать так, как показано на рис. 8.3.

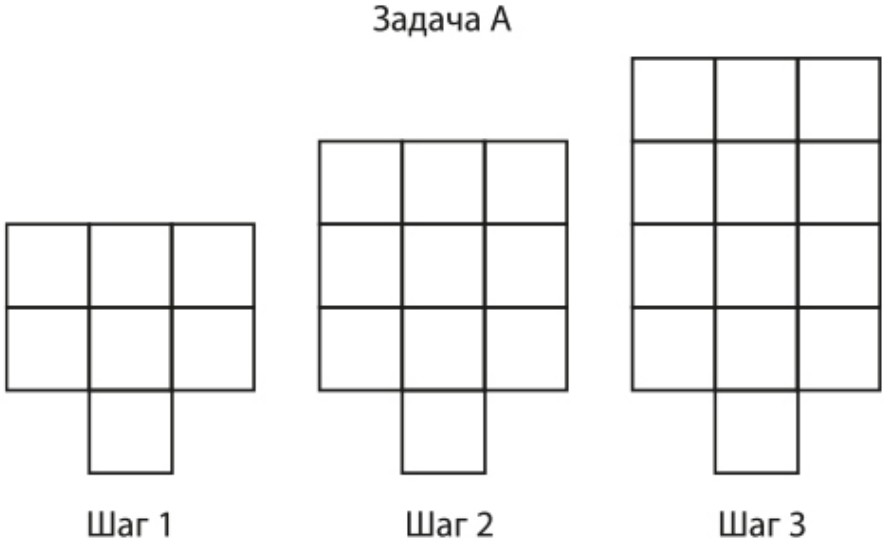
Рис. 8.3. Мозаичные группы

В главе 6 я предложила мозаичное занятие, в ходе которого ученики стали экспертами по вдохновляющим примерам, призванным искоренить стереотипы о том, кто может добиться больших успехов в математике.

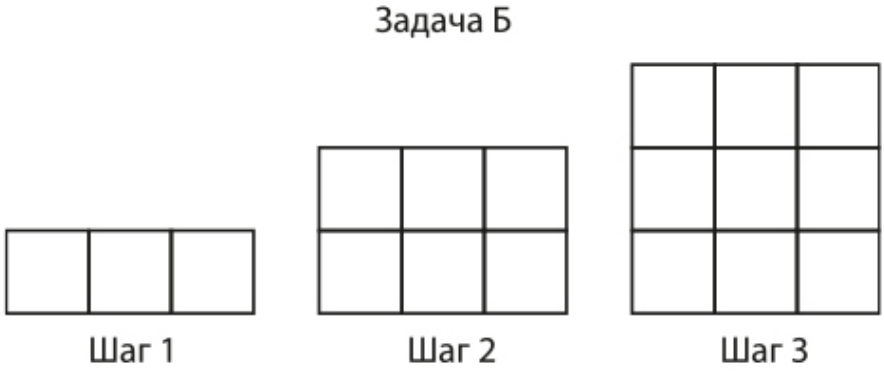
Еще одно мозаичное занятие стимулирует учеников к осмыслению существующих в алгебре связей между графиками, таблицами значений, членами уравнения и закономерностями. Учитель раздает ученикам листы с четырьмя закономерностями, такие как в примерах 8.5–8.8, и предлагает группам учеников сделать плакат, иллюстрирующий, как они представляют себе рост фигур, и показывающий таблицу значений, график уравнения, а также закономерность, обобщенную и

смоделированную с помощью уравнения. Каждый член группы становится экспертом по нескольким формам представления закономерности. Затем учитель вызывает по одному участнику из каждой группы. Все делятся знаниями о своей задаче с другими членами группы.

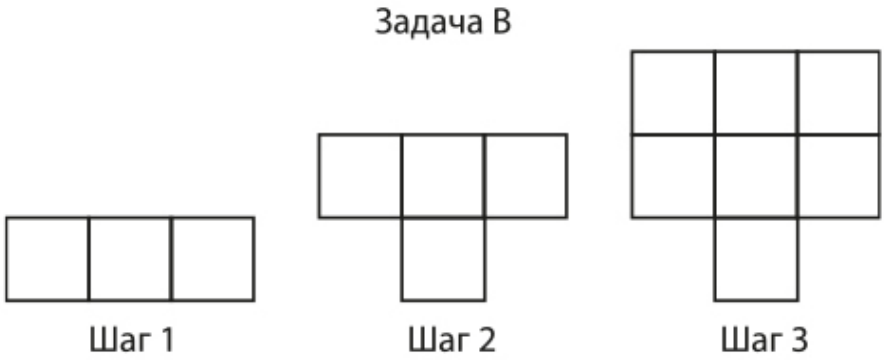
ПРИМЕР 8.5. МОЗАИЧНАЯ ЗАДАЧА А ПО АЛГЕБРЕ



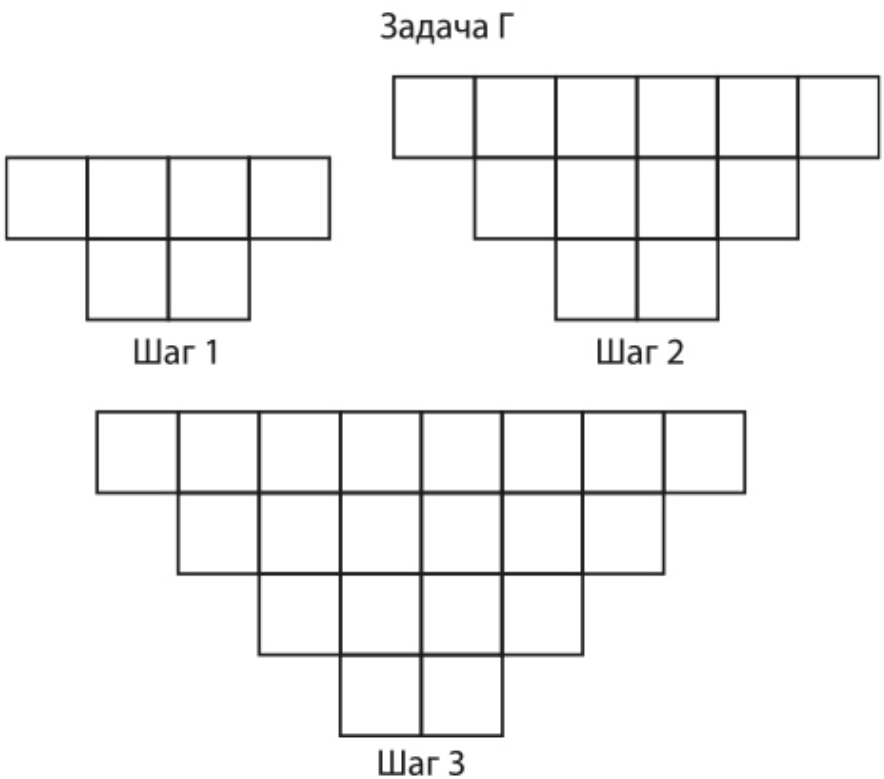
ПРИМЕР 8.6. МОЗАИЧНАЯ ЗАДАЧА Б ПО АЛГЕБРЕ



ПРИМЕР 8.7. МОЗАИЧНАЯ ЗАДАЧА В ПО АЛГЕБРЕ



ПРИМЕР 8.8. МОЗАИЧНАЯ ЗАДАЧА Г ПО АЛГЕБРЕ



Затем группы обсуждают сходства и различия между разными формами представления своих алгебраических закономерностей.

Когда ученики становятся экспертами и несут ответственность за обучение других, это стимулирует их взять на себя ответственность за новые знания, которые они получают.

6. Билет на выход

Билет на выход — лист бумаги, который вы выдаете ученикам в конце урока и в котором предлагаете рассказать о своем обучении (пример 8.9). Прежде чем уйти из класса, ученики заполняют эти листы и сдают их. Они могут поразмышлять, что способствует их обучению и дает учителям ценную информацию об обучении и идеи для следующего урока.

ПРИМЕР 8.9. БИЛЕТ НА ВЫХОД

Билет на выход ___ Имя ___ Дата ___

Три вещи, которые я изучил сегодня...	Две вещи, которые мне показались интересными...	Один вопрос, который у меня есть...

Талон на выход ___ Имя ___ Дата ___

Три вещи, которые я изучил сегодня...	Две вещи, которые мне показались интересными...	Один вопрос, который у меня есть...

7. Онлайн-формы

Я видела, как учителя используют эффективную стратегию, состоящую в том, чтобы предложить ученикам заполнить онлайн-форму в режиме реального времени за время урока и отправить ее на адрес учителя. Можно попросить учеников поделиться комментариями или мыслями по поводу урока. Ученики, которые обычно не принимают активного участия в устном обсуждении, более охотно поделятся своими мыслями в онлайн-режиме. Существует много разных способов использования этой стратегии; в частности, можно попросить учеников прислать свои размышления, предложить проголосовать по какому-то вопросу или показать учителю красный, желтый или зеленый индикатор, который не увидят другие ученики.

8. Рисование в свободной форме

Как было отмечено в главе 4, наука о головном мозге говорит нам, что процесс обучения протекает наиболее эффективно, когда мы используем разные пути в мозге. Этот вывод имеет огромные последствия, которые выходят далеко за рамки методов оценки.

Изучение математики, особенно формальной и абстрактной, на которую приходится бо́льшая часть школьной программы, становится эффективнее, когда ученики используют визуальное и интуитивное математическое мышление в сочетании с числовым. Поистине эффективный способ стимулировать учеников к этому сводится к тому, чтобы предложить им нарисовать свои идеи (рис. 8.4).

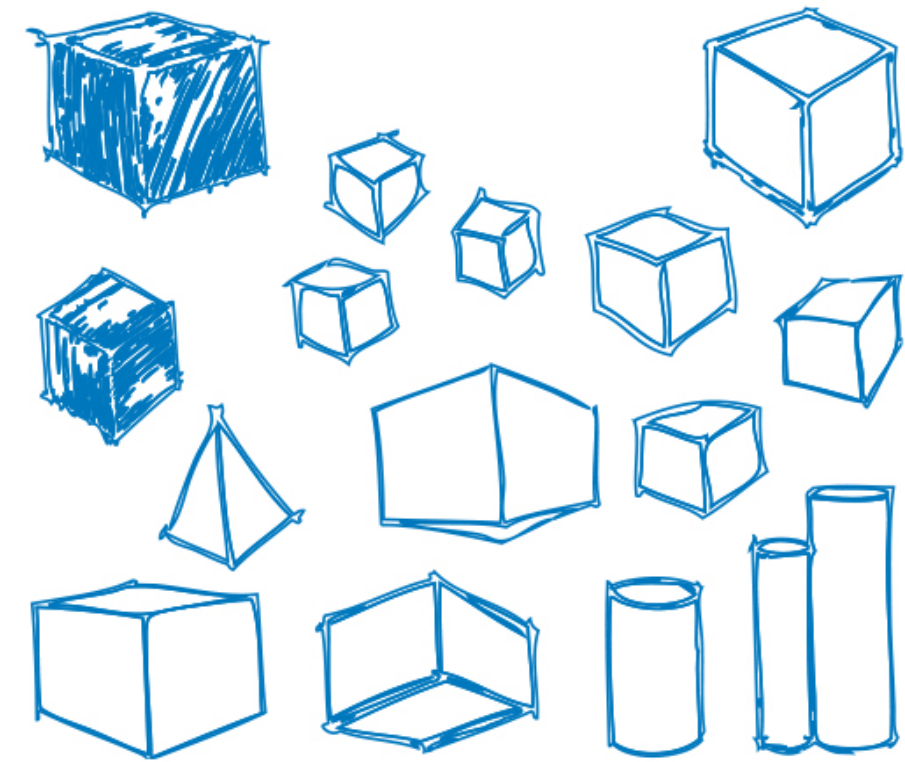


Рис. 8.4. Математический рисунок в свободной форме

Вместо того чтобы предлагать ученикам записать, что они понимают, во время размышлений на уроке или после урока, попросите их изобразить свое понимание в виде эскиза или комикса. Если вы хотите увидеть и даже показать своим ученикам очень интересные и забавные рисунки о математических концепциях, рекомендую некоторые видео Вай Харт, которые можно найти по следующим адресам.

Спирали, последовательность Фибоначчи — представьте себе, что вы растение (часть 1): https://www.youtube.com/watch?v=ahXIMUkSXX0&list=PLF7CBA45AEBAD18B8&index=8.

Вечеринка треугольников: https://www.youtube.com/watch?v=o6KlpIWhbcw&list=PLF7CBA45AEBAD18B8&index=7.

9. Ученики сами пишут вопросы и тесты

Предложите ученикам написать свои вопросы или критерии оценки для других. Само формулирование правильного вопроса поможет сфокусироваться на том, что важно, и позволит мыслить творчески, что уже важно. Ученики получают истинное удовольствие, когда им дают задание написать утверждения для оценки работы по математике.

Комментарии

Все представленные выше стратегии позволяют достичь целей первых двух частей трехэтапного процесса оценки для обучения: эти стратегии помогают ученикам понять, что они изучают и что должны изучить.

Части 1 и 2 процесса оценки для обучения играют очень важную роль сами по себе, а часть 3 дает ученикам поддержку, которую не может предоставить никакой другой метод. Это крайне важная часть процесса оценки для обучения, позволяющая ученикам понять, как преодолеть разрыв между тем, где они есть, и тем, где должны быть. В этой области есть один метод, который превосходит остальные по своей эффективности: процесс, в ходе которого учителя дают ученикам комментарии по поводу их работы. Величайший дар, который вы можете передать своим ученикам, — ваши знания, идеи и обратная связь об их математическом развитии, наряду с позитивными высказываниями и сигналами по поводу мышления роста.

Эллен Круз — одна из тех учителей, с которыми я работала в школьном округе Виста. Во время наших занятий по профессиональному развитию я поделилась с Эллен и другими учителями результатами исследований, о которых шла речь выше, продемонстрировав им положительное влияние комментариев в качестве альтернативы оценкам. Эллен — удивительная и преданная делу учительница, которая работает в непростой школе, находящейся на этапе «улучшения программы». Ведь штат Калифорния отнес эту школу к числу работающих недостаточно эффективно. В ней разнородный состав учеников: 90% — латиноамериканцы, а оставшиеся 10% приходятся на другие этнические группы. 43% учеников изучают английский язык и 86% имеют право на бесплатные обеды. Эллен рассказала

мне, что, когда она начала преподавать в этой школе, руководство было сфокусировано на тестировании, что типично для школ, получивших ярлык «улучшенная программа». Вопросы тестов и тесты по учебным разделам в точности воспроизводили вопросы стандартного с несколькими вариантами ответов. Школа была сосредоточена на «улучшении» (звучит неплохо), и учителя часами сидели над отчетами, сгенерированными программами для проведения тестов, отслеживая закономерности. Затем каждому ученику присваивали определенный цвет, а учителям говорили, что «синие» успешно справятся с тестом штата, а у «красных» почти нет шансов. Учителям говорили, что они должны сосредоточиться на нижнем сегменте «зеленых» учеников и на верхнем сегменте «желтых», поскольку повышение их успеваемости окажет самое большое влияние на результаты тестирования.

Попытки «улучшения» заслуживают похвалы, но метод, который применила эта школа (что типично для школ, проходящих процедуру улучшения программы), выдвигал на первый план группы учеников, способных повысить результаты тестирования, а не делал упор на потребностях конкретных учеников. Школа сначала распределила детей по результатам тестов, а затем и по цветам, от которых зависело, кто получит меньше внимания (ими оказались ученики как с высокой, так и с низкой успеваемостью). Такой подход, подразумевавший работу с детьми как со статистическими показателями, которыми можно манипулировать, используется везде в США, как правило, в ответ на жесткие суждения и ярлыки, навешиваемые во имя «улучшения».

В разгар внедрения культуры достижений, навязанной этой школе, Эллен решила провести среди учеников опрос. Как и следовало ожидать, она обнаружила высокий уровень тревоги в связи с тестами. Ученики сдавали многочисленные тесты, а учителям дали указание постоянно подчеркивать важность эффективной работы в условиях стресса. Эллен хотела изменить эту культуру и для начала отменила тесты по разделам и заменила их оценкой более мелких учебных модулей. Эллен прекратила использовать слова «тест» и «проверка» и назвала свои мини-экзамены возможностью «показать, что вы знаете». Вопросы с несколькими вариантами были исключены, ученикам предлагали ответить на математические вопросы. Кроме того, Эллен прекратила готовить учеников к эталонным экзаменам на уровне школьного округа; она проводила такие экзамены без предупреждения, чтобы предотвратить усиление тревоги, советуя ученикам: «Сделайте всё возможное и ни о чем не беспокойтесь».

Результаты тестов не ухудшились, несмотря на отсутствие предварительной подготовки и сосредоточения на тестах, а уровень тревожности учеников снизился. Важно то, что, как сказала мне Эллен, дети начали получать удовольствие от уроков математики.

Но Эллен (как и другие думающие, неравнодушные учителя) не остановилась на этом, а предприняла следующие шаги для улучшения ситуации. В следующем году Эллен и ее коллеги — преподаватели математики в восьмом классе, Аннет Уилсон и Анджела Тайнсенд, — перестали ставить ученикам оценки, а использовали листы с математическими утверждениями. Кроме того, все учителя этой группы изменили названия своих систем оценки на такое: «Покажите, что вы можете сделать» (пример 8.10).

ПРИМЕР 8.10. САМООЦЕНКА «ПОКАЖИТЕ, ЧТО ВЫ МОЖЕТЕ СДЕЛАТЬ»

Что для нас ценно	Обосновать (в случае необходимости)	
Настойчивость Вы продолжали усердно работать? Вы пробовали что-то еще? Вы задали вопрос? Вы описали, где остановились?		Получилось! Принято
Множество представлений Слова Схемы Графики Таблицы данных Рисунки Диаграммы Более одного решения		Получилось! Принято
Четкие ожидания Вы описали свой процесс размышлений? Как вы получили ответ? Если не получили, на чем вы остановились? Идеи: стрелки, цвет, слова, числа		Получилось! Принято
Результат Вы решили задачу? Если нет, на чем вы остановились? Вы приложили максимум усилий к решению задачи?		Получилось! Принято

Источник: предоставлено Эллен Круз.

Когда эта группа учителей прекратила ставить оценки, используя вместо них комментарии, ученики начали читать и интерпретировать эту обратную связь и время от времени задавать вопросы. Эллен ставила оценки только тогда, когда ученики просили ее об этом. Она сказала мне, что поначалу ей приходилось тратить слишком много времени на обратную связь, которую она регулярно предоставляла всем своим 110 ученикам, и она научилась писать комментарии тогда, когда это приносило

максимальную пользу ученикам. Это идеальный подход к обратной связи. Он отнимает не больше времени, чем проверка заданий или выставление оценок, но приносит гораздо больше пользы ученикам. Периодическая обратная связь, предоставляемая в профессионально рассчитанные важные моменты, — бесценный дар, но его не следует применять слишком часто.

Эллен рассказала мне, что сейчас гораздо больше учеников старательно занимаются математикой и она видит, как они стремятся работать с полной отдачей. Идеальный результат. Эллен рассказала также об усовершенствованиях в ее методах преподавания, проистекающих из полезной информации, которая получена благодаря новым формам оценки и которую она использует для планирования обучения. За годы, прошедшие после того, как Эллен внесла изменения в свой подход к преподаванию и оценке, отметки учеников, которые переходят в старшие классы, существенно улучшились, а количество неудач с изучением алгебры в старшей школе сократилось вдвое.

Рекомендации по выставлению оценок

К сожалению, многие учителя вынуждены ставить оценки, поскольку того требует школьный округ или руководство школы. Теоретически они должны ставить оценки только в конце курса, а не во время его прохождения, когда школьникам нужна информация о том, как учиться лучше, которую необходимо предоставлять в рамках формативного оценивания. Ниже представлен список рекомендаций, как справедливо ставить оценки и при этом подавать ученикам позитивные сигналы о мышлении роста.

1. **Всегда давайте ученикам возможность повторно представить любую работу или сдать тест, чтобы получить более высокую оценку.** Это сильнейший сигнал о мышлении роста, который говорит ученикам, что вас заботит *обучение*, а не одни только результаты. Некоторые учителя говорят мне, что это несправедливо: ученики могут самостоятельно изучить то, что им необходимо, чтобы улучшить свою оценку. Но мы должны ценить такие усилия, ведь они направлены на обучение.

2. **Сообщайте об оценках руководству школы, а не ученикам.** Если в вашей школе надо ставить оценки до завершения курса, не обязательно сообщать о них ученикам. Предоставьте им вербальную или диагностическую обратную связь о способах улучшения результатов.

3. **Используйте многоплановую систему выставления оценок.** Учителя могут считать математику обширной дисциплиной и ценить многоплановый подход к ее изучению на уроках, но при этом оценивать работу учеников только по тому, дают ли они правильные ответы на процедурные вопросы. Лучшие учителя, с которыми я работала и которые ставили оценки, рассматривали скорее работу учеников, а не результаты тестов — записывая, например, задают ли они вопросы, представляют задачи разными способами, рассуждают и обосновывают свой выбор и опираются на размышления друг друга. Иными словами, такие учителя оценивают многоплановость математики. В случае оценки разных способов выполнения работы гораздо больше учеников успешно справляются с заданиями.

4. **Не применяйте 100-балльную шкалу.** Один из самых несправедливых и бессмысленных с математической точки зрения методов выставления оценок — когда учителя используют несколько заданий в качестве основы для оценки, исходя из того, что каждое из них оценивается в 100 баллов, и присваивая 0 баллов за любое незаконченное, отсутствующее или неправильно выполненное задание. Дуглас Ривз (Reeves, 2006) доказал, что такая практика противоречит логике: разрыв между оценками A, B, C и D составляет 10%, а между D и F — 60%. Следовательно, отсутствие какого-либо задания может означать, что ученик получит вместо оценки A оценку D. Ривз рекомендует использовать четырехбалльную шкалу (A = 4, B = 3, C = 2, D = 1, F = 0), в которой все интервалы равны, вместо шкалы, которая не имеет смысла с математической точки зрения:

A = 91 +
B = 81–90
C = 71–80
D = 61–70
F = 0

5. **Не включайте задания, выполненные в начале урока, в оценку, которая выставляется в конце урока.** Когда учителя делают это, они, по сути, ставят ученикам оценку за работу на предыдущем уроке. Но ведь оценки должны отражать то, что ученики освоили на текущем уроке.

6. **Не включайте домашние задания (если они есть) в систему оценки.** Как сказано в главе 6, домашние задания — одна из самых несправедливых практик в сфере образования. Их включение в систему оценок повышает уровень стресса учеников, а также вероятность несправедливых результатов.

Резюме

Когда учителя оценивают работу учеников, у них появляется замечательная возможность: дать школьникам информацию об их обучении (а не успеваемости), что ускоряет путь к успеху и подает сильные сигналы в отношении мышления роста в связи с математикой и обучением. Есть немало результатов научных исследований, свидетельствующих, что переход от выставления отметок и тестирования к методам оценки для обучения оказывает огромное положительное влияние на успеваемость, уверенность в себе, мотивацию и будущее учеников. В данной главе идет речь о работе преданных делу и вдумчивых учителей, которые совершили такой переход. В заключительной главе приведен краткий обзор разных способов проведения уроков математики, ориентированных на мышление роста.

Глава 9. Преподавание математики, ориентированное на мышление роста

Цель этой книги состояла в том, чтобы рассказать учителям, руководителям школ и родителям о таком подходе к преподаванию математики, благодаря которому ученики смогли бы увидеть ее как открытый, ориентированный на рост, познавательный предмет, а себя — как активных участников процесса обучения. Сейчас, работая над последней главой, я понимаю, что мы прошли большой путь, начиная с того, как мы представляем себе потенциал детей, и заканчивая формами оценки, которые помогают воспитать ответственных детей, регулирующих процесс обучения. В этой главе я в сжатом виде сформулирую ряд идей в отношении преподавания, которые помогут вам разработать и проводить уроки математики, ориентированные на мышление роста.

Поощряйте всех учеников

Установите правила работы на уроке

Ученики приходят на урок, не зная, чего ожидают от них учителя. Первые дни занятий и даже первые часы первого дня — самое подходящее время для установления правил поведения. Я часто в начале урока говорю ученикам, что для меня важно, а что нет.

• Я верю в каждого из них; не существует математического мозга или математического гена, и я ожидаю успеха от всех.

• Я люблю ошибки. Каждый раз, когда они делают ошибку, их мозг растет.

• Неудачи и трудности не означают, что они не могут заниматься математикой. Это самые важные элементы математики и обучения.

• Для меня не важна скорость работы; важно, чтобы все трудились тщательно, создавая интересные пути и формы представления.

• Мне нравятся вопросы учеников, и я вывешиваю плакаты с ними на стенах, чтобы над ними размышлял весь класс.

Но все это только слова — безусловно, важные. Но они

ничего не стоят, если ученики не видят, как учителя подкрепляют их действиями.

Мы разместили на сайте YouCubed список семи самых важных правил, которые следует применять в первые дни занятий и на протяжении всего года; в этой книге представлен обзор способов установления этих правил. Некоторые учителя считают полезным размещать на стенах классных комнат плакат YouCubed в самом начале занятий (пример 9.1).

ПРИМЕР 9.1. ПРАВИЛА, КОТОРЫЕ СЛЕДУЕТ ПООЩРЯТЬ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

• Каждый может изучать математику на самом высоком уровне. Побуждайте учеников верить в себя. Не бывает людей, не созданных для математики. Благодаря упорному труду каждый может добиться самых высоких результатов.

• Ошибки очень ценны. Они обеспечивают рост вашего мозга! Преодолевать трудности и делать ошибки — это хорошо.

• Вопросы очень важны. Всегда задавайте вопросы, всегда отвечайте на них. Спросите себя: почему это имеет смысл?

• В математике главное — творческий подход и осмысление. Математика — очень творческая дисциплина, суть ее сводится к визуализации закономерностей и созданию таких путей решения задач, которые могут видеть, обсуждать и критиковать другие ученики.

• Суть математики сводится к связям и коммуникации. Математика — дисциплина, представляющая собой совокупность связей, и одна из форм коммуникации. Представляйте математические концепции разными способами (в виде текста, рисунка, графика, уравнения) и устанавливайте связи между ними. Применяйте цветовое кодирование!

• Глубина гораздо важнее скорости. Лучшие математики, например Лоран Шварц, размышляют медленно и глубоко.

• На уроке математики главное — обучение, а не результат. Математика — дисциплина, ориентированная на рост; чтобы изучить ее, нужны время и большие

усилия.

Помимо предоставления информации о правилах и ожиданиях, полезно, чтобы ученики рассказали о своих предпочтениях в части правил совместной работы в группах. До начала занятий я предлагаю ученикам обсудить в небольших группах, что им нравится и не нравится в поведении других (см. главу 7), и сделать плакаты, на которых отражены эти предпочтения. Это весьма эффективно, поскольку позволяет ученикам установить положительные правила, которые, насколько им известно, разделяют одноклассники, а учителя могут ссылаться на такие плакаты позже, когда необходимо восстановить дисциплину в процессе групповой работы.

Учителя школы Рейлсайд, о которой шла речь в главе 7, придерживаются тщательного подхода к стимулированию эффективной групповой работы, объясняя ученикам, как правильно работать в группе: слушать друг друга, уважать друг друга и опираться на идеи друг друга. Они решили, что на протяжении первых десяти недель старшей школы будут сосредоточиваться не на математике, которую изучают подростки, а на правилах групповой работы и способах взаимодействия. Все это время ученики осваивали математику, но учителей интересовал не охват материала, а формирование уважительного поведения в процессе групповой работы. Такой подход к обучению нашел свое отражение в поразительных достижениях учеников за четыре года учебы в старших классах (Boaler & Staples, 2005).

Тест на оценку участия в работе группы

Моя любимая стратегия стимулирования групповой работы (которую можно применять рано и часто) такова: предложить ученикам пройти тест на оценку участия в работе группы. Авторы, выдвинувшие концепцию комплексного обучения (Cohen & Lotan, 2014), рекомендуют выставлять оценки за такой тест не отдельным ученикам (что подает негативный сигнал с установкой на данность), а скорее поведению группы. Но такой тест не должен заканчиваться выставлением оценок; необходимо, чтобы он подавал ученикам сильный сигнал о том, что способ их взаимодействия важен и что вы всё видите. Мне действительно нравится эта стратегия организации групповой работы; я обучала ей учителей, и позже они мне рассказывали, что это сразу же изменило методы работы учеников в группах.

Чтобы провести тест на оценку участия в работе группы, выберите задачу, над которой ученики должны работать

группами, и покажите им, какие методы вы считаете важными.

Например, приведенные в примерах 9.2 и 9.3 слайды предоставлены очень успешными учителями школы Рейлсайд. На первом показаны методы работы, которым учителя придают особое значение. Для детей младшего возраста можно использовать более короткий список. Второй слайд отражает методы взаимодействия, обеспечивающие эффективную групповую работу.

ПРИМЕР 9.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЦЕЛИ ОЦЕНКИ УЧАСТИЯ В РАБОТЕ ГРУППЫ

Ваша группа добьется успеха сегодня, если вы будете:

• понимать и описывать закономерности;

• обосновывать свой ход мыслей и применять разные способы представления;

• устанавливать связи между разными подходами и представлениями;

• использовать слова, стрелки, числа и цветовое кодирование для разъяснения идей;

• ставить вопросы, чтобы понять ход мыслей других членов команды;

• ставить вопросы, чтобы подтолкнуть группу к более глубокому анализу;

• готовить презентацию, чтобы ученики, не входящие в состав вашей группы, могли понять ход ее мыслей.

Никто не может успешно применять все эти методы, но каждый может овладеть некоторыми из них. Необходимо, чтобы все члены вашей группы справились с сегодняшним заданием.

Источник: материал предоставил Карлос Кабана.

ПРИМЕР 9.3. ГРУППОВЫЕ ЦЕЛИ ОЦЕНКИ УЧАСТИЯ В РАБОТЕ ГРУППЫ

Во время теста на оценку участия в работе группы я буду наблюдать, как вы:

• склоняетесь над столом и работаете;

• поровну делите время для высказываний;

• поддерживаете друг друга;

• слушаете друг друга;
• задаете друг другу много вопросов;
• отрабатываете свои роли в группе.
Источник: материал предоставил Карлос Кабана.

Можно представить эти списки и на плакатах. После того как ученики ознакомятся с методами работы и взаимодействия, предложите им приступить к заданиям. Пока дети работают в группах, ходите по классу и наблюдайте за их поведением, записывая свои комментарии. Для этого вам понадобится лист бумаги или место на доске, разделенное на сегменты: по одному на каждую группу.

Например, когда 32 ученика работают в 8 группах по 4 человека, разделение на сегменты должно быть таким:

1	2	3	4
5	6	7	8

Когда вы будете ходить по классу и делать заметки, фиксируйте высказывания учеников, заслуживающие внимания. Некоторые учителя делают это открыто, записывая комментарии на доске на передней стене класса. Другие используют для этого листики, закрепленные на доске. В конце урока у вас должна быть заполнена вся таблица и вы должны быть готовы поставить группам учеников оценки или предоставить обратную связь об их групповой работе, не выставляя оценок.

Ниже представлен пример выставления оценок за участие в групповой работе.

Быстрый старт Все работают вместе Отличное обсуждение Работают вместе «Давайте пройдем по кругу и выясним, как каждый видит эту фигуру» A+	Все четверо работают Проверяют работу друг друга Задают хорошие вопросы: «Как это было бы с другим числом?» Хорошие групповые роли A+	«Как вы думаете, ребята?» Строят фигуру посреди стола Консультируются друг с другом A+	Разговаривают об одежде Отвлекаются от задания — группе предложено прекратить работу Работают каждый сам по себе, никаких обсуждений B
Пробуют разные идеи Задают друг другу вопросы Обсуждают работу A	Медленно выполняют задание — отвлекаются Строят фигуру посреди стола Проверяют идеи Хорошее обсуждение A	«Кто-нибудь видит другой способ?» Хорошо объясняют друг другу Интересные дискуссии по поводу содержания задачи A+	Начали хорошо Читают в тишине Все постоянно сфокусированы Задают хорошие вопросы A+

Такие заметки не должны быть подробными, но они помогут ученикам понять, что вы считаете важным, и стать гораздо более внимательными к способам взаимодействия с другими. Мои студенты из Стэнфорда и многие учителя, которых я обучала этому методу, получают удовольствие от тестов на оценку участия в работе группы, комично склоняясь и задавая глубокие вопросы, когда я задерживаюсь у их столов со своим блокнотом! Студенты веселятся, гораздо отчетливее при этом понимая, что они должны делать, чтобы эффективно работать в группе.

Я искренне верю в эффективность оценки участия в работе группы. Учителя, которые использовали этот метод в классах, где раньше имелись проблемы с эффективной групповой работой, были поражены положительными переменами в учениках. Те почти сразу начали задавать друг другу хорошие вопросы и думать о равном участии разных членов группы. Такие уроки полезны и для учеников, и для учителей.

Верьте во всех своих учеников

Я всегда понимала, как важно ученикам знать, что учителя в них верят. Я знала это как учитель, а в последние годы четко осознала это и как мать. Когда моей дочери было пять лет, она поняла, что учительница ее класса в Англии дает другим детям более трудные задачи по математике. Она пришла домой и спросила меня, в чем дело. Когда дочь осознала, что, по мнению учительницы, у нее нет способностей (к сожалению, учительница действительно пришла к такому выводу), это подорвало ее уверенность в себе, и у нее сформировалось фиксированное мышление, которое еще долго негативно сказывалось на ее учебе и уверенности в своих силах. Теперь, несколько лет спустя, благодаря большим усилиям родителей и учителей моя дочь полностью изменилась: у нее сформировалось мышление роста, и она любит математику. Хотя учительница никогда не убеждала мою дочь не верить в себя, ей удалось четко и ясно донести этот сигнал, и моя дочь восприняла его уже в пять лет.

В школе, которую посещала моя дочь в Англии, учеников второго класса разделяли на группы по способностям. Но эта практика была прекращена, после того как там изучили отчеты о результатах исследований и узнали о стратегиях преподавания в смешанных группах. После всех этих перемен директор школы написал мне письмо, сообщив, что это полностью изменило уроки математики и повысило уровень успеваемости во всей школе. Когда учеников делят на группы по способностям, даже давая группам безобидные названия (например, «красные» и «синие»), ученики все равно знают об этом, а их мышление становится более ориентированным на данность. Когда в школе моей дочери учеников распределили по группам в зависимости от способностей, дети из групп низшего уровня приходили домой со словами: «Все умные перешли в другую группу». Сигнал, который получали при этом ученики по поводу своих возможностей в целом (а не только в изучении математики), оказывал на них разрушительное воздействие. Один из первых шагов, которые нам необходимо предпринять, — отказаться от устаревших методов разбиения на группы, ориентированного на фиксированное мышление, и донести до всех учеников мысль о том, что они могут добиться успеха.

Важность осведомленности учеников о том, что учитель верит в них, подтвердило проведенное недавно исследование, в ходе которого был получен весьма значимый результат (Cohen & Garcia, 2014). Все ученики, принимавшие участие в нем, написали сочинения и получили обратную связь от учителей, а половина из них получила одно дополнительное предложение в конце комментариев. Год спустя ученики, в работах которых было это

предложение, добились гораздо более высоких результатов, хотя учителя не знали, кому именно оно «досталось», и между группами учеников больше не было никаких различий. Кажется невероятным, что одно предложение кардинально изменило путь учеников, благодаря чему год спустя они смогли существенно повысить успеваемость при отсутствии других изменений. Но вот это предложение: «Я говорю тебе это, потому что верю в тебя».

Ученики, получившие это предложение, добились более высоких результатов. Эффект был особенно сильным в случае цветных учеников, многие из которых чувствуют, что учителя меньше их ценят (Cohen & Garcia, 2014). Я часто рассказываю учителям об этом результате, и они всегда осознают его значимость. Но я говорю об этом *не* в надежде на то, что учителя будут добавлять это предложение ко всем работам. Иначе ученики заподозрят учителей в неискренности, и предложение будет иметь обратный эффект. Я хочу подчеркнуть силу слов учителей и их убеждений в отношении учеников, а также призвать учителей постоянно подавать детям позитивные сигналы о том, что в них верят.

Учителя могут донести позитивные ожидания до учеников с помощью ободряющих слов. Это легко сделать с мотивированными учениками, которым легко учиться и которые умеют быстро работать. Но еще важнее донести такие позитивные убеждения и ожидания до немотивированных учеников, которые работают медленно и которым все дается с трудом. Важно также осознавать, что скорость, с которой ученики улавливают суть концепций, не указывает на наличие математических способностей (Schwartz, 2001). Как бы трудно это ни было, важно не придерживаться предвзятого мнения по поводу того, кто будет работать хорошо над задачей, еще до ее постановки. Мы всегда должны быть готовы к тому, что любой ученик будет работать хорошо. Некоторые ребята ведут себя так, будто математика для них — постоянная борьба; они могут задавать много вопросов или все время говорить, что не могут двигаться дальше, но они просто скрывают свой математический потенциал и, вероятно, обладают фиксированным мышлением. Некоторые ученики, возможно, в раннем возрасте получили негативные сигналы и опыт взаимодействия с математикой, или у них не было таких условий для роста мозга и обучения, как у других, поэтому их уровень ниже уровня ровесников. Но это не значит, что они не смогут повысить свой уровень при правильном подходе к преподаванию математики, позитивных сигналах и, главное, высоких ожиданиях со стороны учителя. Вы можете стать человеком, который полностью изменит жизнь этих детей и

откроет им путь к обучению. Как правило, для этого нужен всего один человек — и его ученики никогда не забудут.

Цените трудности и неудачи

Учителя заботятся об учениках, хотят, чтобы они добились успеха, и знают, что тем важно испытывать положительные эмоции к математике. Возможно, именно это привело к тому, что большинство уроков математики в США проводятся так, чтобы ученики выполняли бо́льшую часть заданий правильно. Но новые данные о головном мозге показывают, что детям необходимо иное. Самые эффективные уроки математики — те, во время которых ученики работают над сложными задачами, когда их побуждают рисковать и они напряженно трудятся и терпят неудачи, но при этом получают удовольствие. Это значит, что математика должна быть трудной для учеников, чтобы создать условия для роста их мозга и установления связей. Но недостаточно просто повысить уровень сложности задач: это вызвало бы у учеников чувство безысходности. Это означает скорее необходимость изменения характера задач на уроках математики и постановки задач из категории «низкий пол, высокий потолок». Как было сказано в главе 5, «низкий пол» — доступность изучаемых концепций, а «высокий потолок» — способность учеников осмыслить их на высоком уровне.

Кроме того, учителя должны доносить до учеников мысль о том, что трудности и неудачи полезны. Многие студенты, которых я обучаю в Стэнфорде, всю жизнь добивались больших успехов и получали губительную обратную связь с установкой на данность, когда им говорили, что они умные. Сталкиваясь в Стэнфорде с более трудной работой и не получая оценки А за все, некоторые из них расстраиваются, ощущая опустошенность и ставя под сомнение свои способности. Когда они занимаются математикой, которая заставляет их прилагать усилия (это самый подходящий момент для обучения), они быстро теряют уверенность в себе и начинают сомневаться, достаточно ли они умны, чтобы учиться в Стэнфорде. Эти студенты воспитывались в культуре достижений, где трудности и неудачи никогда не ценились. Мои первокурсники говорят мне, насколько важны были для них идеи, которые мы изучаем, и как осознание того, что трудности полезны, помогло им продолжать изучение курса математики и инженерного дела и помешало бросить заниматься дисциплинами STEM.

Мы должны всячески стремиться развеять миф об успехе без

усилий, подчеркивая, что успешные люди много работают и часто терпят неудачи — даже те, кого считают гениями. Мы должны воздерживаться от высокой оценки успеха без усилий и похвал в адрес учеников, которые быстро решают математические задачи. Нам следует высоко ценить настойчивость и глубокие размышления. Когда ученики терпят неудачу и сталкиваются с трудностями, это ничего не говорит об их математическом потенциале; это свидетельствует о том, что их мозг растет, активизируются синапсы и формируются новые пути, которые сделают их сильнее в будущем.

Хвалите учеников и помогайте им, способствуя их развитию

Работая с детьми дошкольного возраста, Кэрол Дуэк обнаружила, что некоторые из них проявляют настойчивость и стремятся продолжать, когда терпят неудачу, а другие сразу бросают работу и просят снова дать им легкие задачи. Такая настойчивость и ее отсутствие были присущи мышлению детей, которым исполнилось всего три-четыре года.

Когда исследователи организовали с этими детьми ролевые игры и предложили им притвориться взрослыми, оценивающими их работу, настойчивые дети изображали взрослых, которые сосредоточены на стратегиях и говорят, что детям удастся добиться успеха, если они уделят работе больше времени или используют другой подход. Дети, которым не была свойственна настойчивость, изображали взрослых, утверждающих, что ребенок не может закончить работу и должен сидеть у себя в комнате. Создавалось впечатление, что ненастойчивые дети получили обратную связь о том, что у них есть личностные ограничения, а неудача — это плохо (Gunderson et al., 2013). Результаты этого исследования и многих других по теме мышления (Dweck, 2006a, 2006b; Good, Rattan, & Dweck, 2012) свидетельствуют, что формы обратной связи и похвалы очень важны. Когда ученики слышат, что они умные, поначалу это доставляет им удовольствие. Однако, сталкиваясь с неизбежными трудностями и неудачами, они начинают сомневаться в своих умственных способностях. Такие дети постоянно оценивают себя в соответствии с неизменной шкалой «умности», что вредит им, даже если они получают много положительной обратной связи по поводу своих способностей, что иллюстрирует пример со студентами Стэнфорда.

Вместо того чтобы говорить ученикам, что они умные или способные, учителя и родители должны сосредоточиться на

конкретных стратегиях, которые использовали дети. Вместо слов «Какой ты умный» лучше сказать что-то вроде: «Замечательно, что ты до этого додумался» или «Мне нравятся твои рассуждения». Исключить слово «умный» из лексикона трудно, но мои студенты хорошо поработали над этим и теперь хвалят людей за интересные идеи, достижения, знания, трудолюбие и настойчивость.

Когда ученики неправильно выполняют работу, вместо того чтобы говорить «Это неправильно», попытайтесь понять ход их мыслей и поработайте с ними. Например, если, сложив $^1/_3$ и $^1/_4$, ученики решили, что ответ $^2/_7$, вы могли бы сказать: «Понимаю, что ты делаешь; ты используешь то, что мы знаем о сложении целых чисел, чтобы сложить числитель и знаменатель. Но это дроби, а при сложении дробей мы должны думать о всей дроби, а не об отдельных числах, из которых она состоит». В рассуждениях учеников всегда есть какая-то логика, которую полезно найти — не для того, чтобы предотвратить мысли о неудаче, а для того, чтобы отдать должное размышлениям учеников. Даже если дети неправильно выполнили задание, постарайтесь не дать им понять, что задача слишком сложна для них: они могут решить, что у них ограниченные способности. Вместо того чтобы фокусироваться на стратегиях, скажите что-нибудь вроде: «Ты еще не знаешь стратегий, необходимых для этого, но скоро изучишь их».

Важно не предлагать ученикам слишком много помощи и не снижать когнитивную сложность задач. Французский исследователь Ги Бруссо обнаружил «дидактический контракт», существование которого признали с тех пор учителя и исследователи во всем мире (Brousseau, 1984; Brousseau, 1997). Бруссо описывает типичную для уроков математики ситуацию, когда ученики просят учителей о помощи. Они рассчитывают на помощь, а учителя знают, что их задача — помогать детям; в итоге учителя разбивают задачу на составляющие и упрощают ее, снижая ее когнитивную сложность. Бруссо обращает внимание на то, что это совместное действие учителей и учеников, поскольку обе стороны играют отведенную им роль, выполняя действующий на уроках «дидактический контракт», из-за которого ученики упускают возможность чему-то научиться. Согласно такому контракту, ученики ожидают, что им не будут создавать трудностей, и рассчитывают на помощь, а учителя знают, что *их* задача — помогать ученикам, поэтому немедленно вмешиваются, часто невольно лишая детей возможности учиться. Авторы учебников поступают так же, разбивая задачи на небольшие фрагменты, над которыми должны работать ученики. Когда мои

ученики просят о помощи, я стараюсь не выполнять за них математические размышления. Я часто предлагаю им представить задачу в графическом виде, что всегда помогает открыть новые идеи.

Недавно я прочла об учительнице второго класса Наде Бориа, которая предлагает такой ответ на просьбы учеников о помощи: «Минутку. Вы хотите, чтобы вырос мой мозг, или хотите увеличить свой?» (Frazier, 2015).

Замечательный ответ. Учителя должны оценивать каждое взаимодействие с учениками, руководствуясь своими профессиональными знаниями и интуицией, чтобы понять, когда те способны преодолеть больше трудностей, не испытывая разочарования. Но важно помнить, что *отсутствие* помощи — зачастую лучшая помощь.

Правила, которые мы устанавливаем для учеников на уроках, способы, которыми мы помогаем им и поощряем их, и сигналы, которые мы им подаем, крайне важны. Но мне хотелось бы обратить особое внимание на то, что подача ученикам сигналов в отношении мышления роста не поможет им, если при этом мы не покажем, что математика — развивающая дисциплина. Далее мы сфокусируемся на стратегиях и методах, которые учителя могут использовать, чтобы преподавать ученикам открытую, развивающую, творческую математику.

Сделайте математику открытой

Преподавайте математику как открытую, развивающую, обучающую дисциплину

Большинство задач по математике, которые используются на уроках и дома, — узкие процедурные вопросы, требующие от учеников выполнения вычислений. Когда ученики бо́льшую часть времени занимаются этим, им трудно поверить в то, что математика — развивающая дисциплина. Ведь закрытые вопросы заставляют их думать, что она носит фиксированный характер и ее суть сводится к правильным и неправильным ответам. Некоторые вопросы действительно требуют одного правильного ответа, но они не нужны ученикам для полноценного понимания математики. Если они все же используются, они должны составлять только малую долю всех вопросов. Задачи по математике должны обеспечивать ученикам достаточно пространства для обучения. Вместо того чтобы требовать ответов на вопросы, задачи должны предоставлять им возможность исследовать, творить и развиваться.

Любую математическую задачу можно сделать открытой, и тогда гораздо больше учеников проявят к ней интерес и смогут узнать что-то новое. Ниже описаны четыре полезных приема.

1. Вместо того чтобы предлагать ученикам найти ответ на вопрос, чему равно $^1/_2$ разделить на $^1/_4$, предложите им предположить, сколько будет $^1/_2$ разделить на $^1/_4$, и придать ответу смысл, в том числе с помощью визуального представления решения. Как было сказано в главе 5, когда Кэти Хамфриз предложила ученикам решить задачу «1 разделить на $^2/_3$», она начала с таких слов: «Вероятно, вы знаете правило, с помощью которого можно решить эту задачу, но сегодня оно не имеет значения. Я хочу, чтобы вы объяснили, почему ваше решение *имеет смысл*».

2. Вместо того чтобы предлагать ученикам упростить выражение $^1/_3(2x + 15) + 8$ (типичная задача, которую ставят на уроках алгебры), предложите им найти все эквивалентные способы представления этого выражения. На рисунке 9.2 приведены примеры ответов.

3. Вместо того чтобы спрашивать учеников, сколько квадратов будет на шаге 100, спросите их, как они представляют себе рост закономерности, и предложите им использовать это понимание для обобщения закономерности до шага 100 (рис. 9.1).

$^1/_3(2x + 15) + 8$	$(2x + 15)/3 + 8$	$^2/_3x + 5 + 8$
$2x/3 + 13$	$(2x + 15 + 24) / 3$	$^1/_3(2x + 39)$

Рис. 9.1. Примеры алгебраических выражений

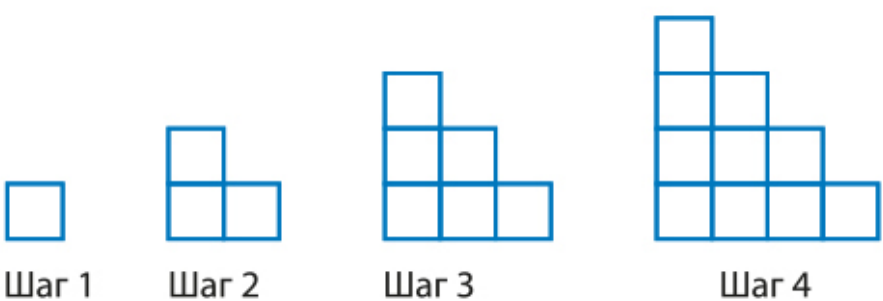


Рис. 9.2. Ступеньки

Любую математическую задачу можно открыть так, чтобы она обеспечивала ученикам больше пространства для обучения (подробнее см. главу 5). Например, вы можете предложить

ученикам обсудить:

- способы восприятия математики;
- способы представления идей;
- различные пути решения задач и реализации стратегий;
- выбранные методы: «Почему вы использовали эти методы? Как они работают?»

Когда ученики работают над открытыми задачами, они не только воспринимают математику как развивающую дисциплину, но и становятся исследователями. Они больше не ищут ответ; они анализируют идеи, устанавливают связи, развиваются и учатся. В процессе исследований они изучают формальную математику — методы и формулы, знания которых требует стандартная учебная программа. Разница в том, что они изучают стандартные методы, когда в них возникает необходимость, что пробуждает мотивацию и заинтересованность в изучении этих методов (Schwartz & Bransford, 1998). Как я уже подчеркивала, лучшие открытые задачи по математике — те, которые относятся к категории «низкий пол, высокий потолок» (см. сборник задач на сайте YouCubed — http://www.youcubed.org/tasks). На мой взгляд, чтобы понять, является ли задача открытой, нужно задать важный вопрос: обеспечивает ли она пространство для обучения?

Призывайте учеников быть математиками

Математики считают свою дисциплину творческой, красивой и эстетичной. Все дети могут работать так же, как математики, поэтому стимулирование их к тому, чтобы стать мини-математиками, может придать им уверенность в себе. Важно, чтобы ученики активно предлагали идеи — выдвигали математические гипотезы. Дебора Болл, которая сейчас занимает должность декана педагогического факультета Мичиганского университета, — одна из самых удивительных учительниц, с которыми я когда-либо встречалась. Дебора учила своих третьеклассников быть математиками: становиться исследователями и выдвигать гипотезы. Выработав единое мнение по поводу той или иной математической концепции, ученики ее класса говорили, что у них есть «рабочее определение», а затем уточняли его в рамках дальнейших исследований. Во время одного урока мальчик Шон выдвинул предложение по поводу числа 6, заявив, что оно может быть и четным, и нечетным (видео можно посмотреть здесь: Mathematics Teaching and Learning to Teach, 2010; http://

deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65013).

Основанием для этой гипотезы послужило то, что число 6 состоит из нечетного количества чисел 2, а другие четные числа, например 4 и 8, имеют в своем составе четное количество чисел 2. Многие ученики вступили в спор с Шоном, вернувшись к рабочему определению четного числа, которое было выработано классом. Большинство учителей сказали бы Шону, что он неправ, и пошли дальше, но Дебору заинтересовал ход его мыслей. Среди учеников началась оживленная дискуссия, которая захватила зрителей с разным образованием и убеждениями, в том числе учителей и математиков. Во время урока дети начали глубоко анализировать гипотезу Шона и ни разу не попросили учительницу сказать им, прав Шон или нет, что сразу же положило бы конец обсуждению. Третьеклассники попросили Шона доказать свою гипотезу и предложили контраргументы, воспользовавшись разными определениями четного числа, чтобы показать Шону, что 6 — только четное число, которое не может быть нечетным. В какой-то момент Дебора поняла, что Шон обратил внимание на такое свойство числа 6 и других чисел (таких, как 10), состоящих из нечетного количества двоек, у которого нет названия в математике. В итоге класс решил назвать такие числа «числами Шона». Шон сделал наблюдение, которое не было неправильным; он обратил внимание на то, что у некоторых чисел есть особые свойства. Во время дальнейших дискуссий в течение года ученики этого класса продолжали исследовать числа и ссылались на «числа Шона», когда встречали их. В отличие от многих третьеклассников, которых отталкивает процедурное представление математики, этим детям нравилась возможность делиться своими идеями, а также выдвигать гипотезы, при этом изучая формальную математику. Эти ученики с воодушевлением работали с гипотезами, рассуждениями и доказательствами и напоминали стороннему наблюдателю юных ученых (Ball, 1993).

Некоторых людей шокирует мысль о том, чтобы называть детей математиками, хотя они спокойно называют их юными художниками и учеными. А дело в том, что математика поставлена на своего рода пьедестал, о чем я говорила в главе 6. Нам необходимо бороться с представлением о том, что только люди, много лет изучавшие математику в высших учебных заведениях, должны выступать в качестве математиков. Мы должны прекратить оставлять опыт взаимодействия с истинной математикой на самый последний период обучения, магистратуру. Ведь к этому моменту многие теряют интерес к математике. Не существует более эффективного способа донести

до всех мысль о том, что математика — широкая, исследовательская дисциплина, которой могут заниматься все без исключения, чем предложить детям стать математиками.

Преподавайте математику как науку о закономерностях и связях

Суть математики сводится к изучению закономерностей. Многие понимают, что имеют дело с закономерностями, работая над такими задачами, как на рис. 9.3, в которых им предлагают продолжить закономерность.

Рис. 9.3. Полоса закономерности

Но даже в процессе изучения арифметики или более абстрактных областей математики работа любого ученика сводится к поиску закономерностей. Я пыталась стимулировать своих детей к тому, чтобы они воспринимали себя как искателей закономерностей, и недавно увидела результат, когда моя восьмилетняя дочь осваивала азы деления. Она только что изучила «традиционный алгоритм», но потом ей задали такие примеры:

$$6\overline{)18}\ 7\overline{)35}\ 8\overline{)27}$$

$$8\overline{)96}\ 6\overline{)72}\ 7\overline{)83}$$

Она пришла к выводу, что алгоритм применим только в некоторых случаях. Поработав над заданиями, моя дочь сказала: «Вижу закономерность; метод цикла деления [под которым она подразумевала традиционный алгоритм] помогает только тогда, когда делимое больше делителя». Я не сторонник обучения делению с помощью традиционного алгоритма: часто он не позволяет ученикам увидеть ситуацию в целом и препятствует пониманию значения разряда. Но меня порадовало то, что ориентация на поиск закономерностей помогла моей дочери размышлять о закономерностях, а не слепо придерживаться метода. Я не утверждаю, что традиционный алгоритм бесполезен. Но он может принести пользу *после того*, как ученики поймут, что есть много стратегий деления. Изучая деление, ученики должны использовать методы, стимулирующие осмысление

чисел, участвующих в операции, и самой концепции деления.

Когда учителя объясняют математические методы, на самом деле они показывают закономерности: демонстрируют нечто постоянное, *общее*. Когда мы умножаем на 10 любое число больше 1, ответ обязательно содержит 0. Когда мы делим длину окружности на ее диаметр, мы всегда получаем число π. Все это закономерности. Когда ученикам предлагают воспринимать математику как науку о закономерностях, они испытывают воодушевление по отношению к этому предмету. Кроме того, им можно предложить поразмышлять о характере закономерностей: «Можете ли вы обобщить этот случай?» Кит Девлин, ведущий математик и «математический человек» Национального общественного радио, написал ряд замечательных книг для широкого круга читателей. В одной из моих любимых книг «Математика: наука о закономерностях» Девлин показывает, что работа математиков сводится к использованию и изучению закономерностей, проистекающих из того, что он называет окружающим миром или человеческим разумом. Девлин цитирует великого математика Уолтера Сойера: «Математика — это классификация и изучение всех возможных закономерностей», а закономерности включают в себя «любую регулярность, которую может распознать разум». Девлин соглашается с этим, утверждая: «Суть математики — не числа, а жизнь. Это мир, в котором мы живем. Это идеи. Будучи отнюдь не бессодержательной и стерильной, какой ее часто изображают, она наполнена творчеством» (Devlin, 2001).

Откройте ученикам мир закономерностей; дайте им активную роль в отслеживании закономерностей во всех областях и на всех уровнях.

В главе 3 я говорила о Мариам Мирзахани, математике и моей коллеге из Стэнфордского университета. Она попала в сводки новостей во всем мире, когда стала первой женщиной, получившей Филдсовскую премию. Обсуждая огромный вклад Мариам в развитие математики, специалисты говорили о связи ее работы со многими областями этой науки, такими как дифференциальная геометрия, комплексный анализ и динамические системы. Мариам размышляла так: «Мне нравится пересекать воображаемые границы, которые люди устанавливают между разными областями. Это очень воодушевляет… Есть так много инструментов, и ты не знаешь, какой из них сработает. Все дело в том, чтобы быть оптимистом и пытаться находить связи между разными вещами». Мне хотелось бы, чтобы все ученики мыслили так же.

Когда ученики устанавливают и видят связи между разными

методами, они начинают понимать истинную математику и получают от нее гораздо большее удовольствие. Это особенно важно для вовлечения большего числа девочек в различные области STEM (подробнее см. главу 6). Стандартная учебная программа часто препятствует установлению связей, поскольку представляет математику как набор разрозненных тем. Но учителя могут и должны восстанавливать связи, постоянно рассказывая о них, подчеркивая их важность и предлагая ученикам поразмышлять о связях и обсудить их. На видео, представленном на сайте YouCubed, показано, как тема пропорционального рассуждения связывает дроби, графики, треугольники, коэффициенты, теорему Пифагора, таблицы, фигуры, угол наклона и умножение (YouCubed at Stanford University, 2015c; http://www.youcubed.org/tour-of-mathematical-connections). Мы сняли это видео, чтобы продемонстрировать связи между разными областями математики (о существовании которых ученики, возможно, даже не подозревали), и помочь им размышлять о таких связях. На основании этого видео учеников необходимо стимулировать к исследованию и поиску математических связей разными способами.

Ниже представлено несколько способов привлечения внимания к связям в математике.

• Поощряйте учеников предлагать разные методы решения задач, а затем найти связи между ними, например обсудив их сходства и различия и почему можно использовать один метод, а не другой. Это можно сделать с методами, которые используются для решения числовых задач (см. рис. 5.1 в главе 5).

• Предложите ученикам находить связи между математическими концепциями в процессе работы над задачами. Например, обратите внимание на две математические задачи, представленные в примере 9.4 и на рис. 9.4.

ПРИМЕР 9.4. СОБАЧЬИ ГАЛЕТЫ

Сколько существует способов разделить 24 собачьи галеты на две группы?

Сколько существует способов разделить 24 собачьи галеты на равные группы?

Представьте полученный результат в графическом виде, отображающем все комбинации.

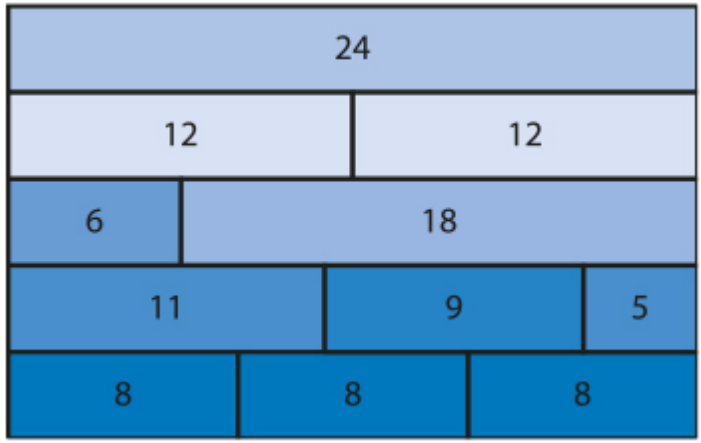


Рис. 9.4. Решение задачи с собачьими галетами

Учителя могут предложить ученикам представить решение более чем в одной форме и связать числа в своих решениях с диаграммами, что позволит задействовать разные пути в головном мозге. Некоторые ученики могут использовать бумагу в клетку, другие — числовую ось, еще кто-то — воспользоваться кубиками или другими мелкими предметами. Учителя могут предложить ученикам поразмышлять о разных методах, которые можно использовать для деления на равные группы (в частности, сложение и умножение), а также о том, как эти методы связаны друг с другом.

В разных заданиях, представленных в примере 9.5, ученики должны сфокусироваться на разных областях математики и связях между ними. Успешные ученики — не те, которые представляют себе математику как набор разрозненных тем (такой точки зрения придерживается большинство учеников). Успешными можно считать скорее тех, кто воспринимает ее как совокупность взаимосвязанных концепций (Program for International Student Assessment (PISA), 2012). Именно такой подход учителя должны активно поощрять, особенно если учебники создают противоположное впечатление. Математика как совокупность связей вдохновляет и притягивает учеников, и все учителя могут создать условия для того, чтобы дети увидели связный характер математики.

ПРИМЕР 9.5. АКЦЕНТ НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ СВЯЗЯХ

Представьте дроби $^{3}/_{4}$, $^{6}/_{8}$ и $^{12}/_{16}$ в виде графиков.

Представьте эти дроби в виде подобных треугольников.

Чем схожи и отличаются эти формы представления дробей — в виде чисел, графика и треугольников? Можете ли вы применить цветовое кодирование к различным свойствам каждой формы представления, чтобы эти свойства были представлены одним цветом в разных представлениях?

Обучайте учеников творческому и визуальному подходу к математике

На своих уроках я стимулирую творческий подход, ставя интересные задачи и придавая большое значение мыслительному процессу. Я говорю, что меня не интересует быстрота выполнения; мне нужно интересное представление идей, творческий метод или решение. Когда я использую такой подход к постановке математических задач, ученики всегда удивляют меня своим творческим мышлением.

Очень важно добиться того, чтобы ученики применяли визуальное мышление в процессе решения задач по математике. Это обеспечивает доступ к пониманию и задействованию разных путей в головном мозге. Аманда Кунлаба — учительница четвертого класса, которая объединяет искусство с основными школьными предметами, в том числе математикой. Она рассказывает, как однажды спросила своих учеников, элементы каких уроков искусства им больше всего понравились в основных школьных предметах. Она вспоминает, как один ученик «спокойно, но с воодушевлением объяснил, что ему нравится изобразительное искусство, поскольку творчество помогает ему “забыть о плохом”, и что ему это необходимо “чаще одного раза в неделю”» (Koonlaba, 2015).

Искусство и визуальное представление играют не только терапевтическую и творческую роль, хотя это очень важно. Они играют также решающую роль в обеспечении доступа к пониманию разных предметов. Когда я предлагаю детям визуализировать идеи и представить их в графическом виде, это всегда приводит к повышению уровня вовлеченности и созданию новых возможностей понимания математических концепций. Некоторым ученикам визуальное представление дается с трудом, но именно им использование этого подхода приносит самую большую пользу.

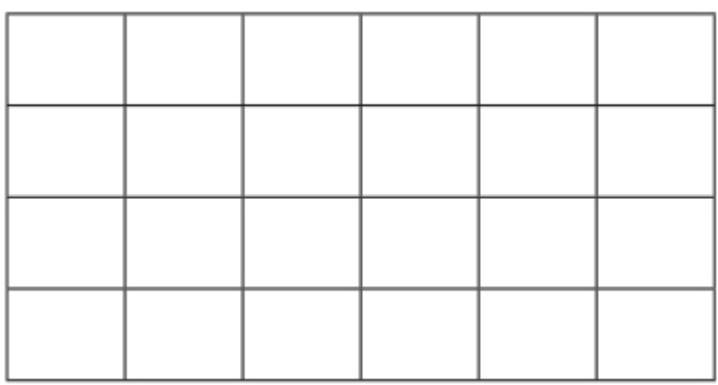
Кроме того, учителя должны постоянно предлагать ученикам связывать идеи, представленные в визуальной форме, с числовыми или алгебраическими методами и решениями. Как

показано в главе 5, цветовое кодирование — хороший способ стимулировать установление таких связей. В следующих двух примерах мы видим, насколько цветовое кодирование может улучшить понимание учениками таких концепций, как геометрические фигуры, дроби и деление. В предыдущих главах приведены примеры применения цветового кодирования для алгебраических выражений и параллельных прямых. Когда ученики осваивают соотношения углов, им можно предложить раскрасить разные углы треугольника, разрезать рисунок и выстроить углы в линию, чтобы увидеть соотношения между ними. Визуальное представление углов поможет запомнить эти соотношения.

Понимание дробей тоже можно улучшить, предложив ученикам представить их с помощью цветового кодирования (см. пример 9.6 и рис. 9.5).

ПРИМЕР 9.6. ЦВЕТОВОЕ КОДИРОВАНИЕ ШОКОЛАДНОГО ПИРОГА

Сэм испек шоколадный пирог, который хочет разрезать на 24 равные части. Он намерен разделить пирог поровну со своими пятью друзьями. Разделите пирог на части и воспользуйтесь методом цветового кодирования, чтобы показать, сколько кусочков пирога получат Сэм и его друзья.



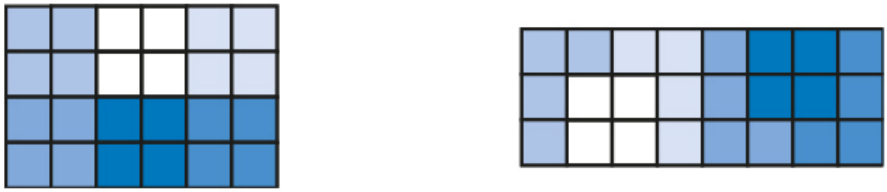


Рис. 9.5. Решение задачи с пирогом Сэма (пример 9.6)

Мне особенно нравится подход к цветовому кодированию деления, который разработали Тина Лаптон, Сара Пратт и Керри Ричардсон. Он состоит в том, чтобы предлагать всем ученикам решать задачи на деление с помощью «лоскутного одеяла», которое действительно помогает представить себе и понять разделение чисел на равные группы и остатки (рис. 9.6). Более подробное описание способов организации этого полезного вида деятельности см.: Lupton, Pratt, & Richardson, 2014.

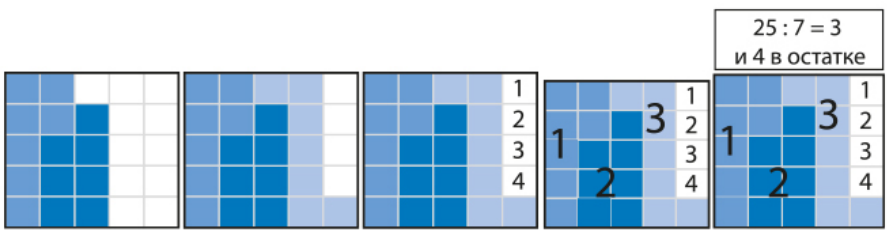


Рис. 9.6. Лоскутные одеяла деления
Источник: Lupton, Pratt, & Richardson, 2014.

Представление математических концепций разными способами — важная математическая практика, которую применяют специалисты по решению задач высокого уровня. Математики используют разные способы представления концепций — графики, таблицы, текстовое описание, выражения, а также (реже) рисунки и наброски. Мариам Мирзахани так описывает процесс размышлений над сложной математической задачей.

> Не нужно записывать все детали… Но процесс рисования как-то помогает представить себе картину происходящего.

Мариам сказала, что ее трехлетняя дочь Анахита часто восклицает: «О, мамочка снова рисует!» — когда видит свою маму-математика за работой. «Может, она думает, что я художник?» (Klarreich, 2014).

Каждый раз, когда мне приходится решать сложную

математическую задачу, я рисую ее; это лучший из известных мне способов решить трудную задачу и понять концепции, лежащие в ее основе. Работая с учениками, я предлагаю им представить задачу в графическом виде, когда у них возникают трудности; при этом я задаю им вопрос: «Вы пробовали нарисовать эту задачу?» Ученикам, которые не привыкли рисовать задачи, поначалу трудно, но они могут освоить этот метод, и он будет приносить им пользу. В главе 5 представлено больше идей по поводу способов, позволяющих увлечь учеников представлением математических задач в виде рисунков.

Поощряйте интуицию и свободу мысли

В главе 5 идет речь о том, как пользователи математики высокого уровня (такие, как Себастьян Трун, создающий роботы для Смитсоновского института) применяют интуицию для развития математических идей. Леоне Бертон провела интервью с 70 математиками-исследователями, чтобы определить характер их работы; 58 из них говорили о важной роли интуиции в этой работе. В книге «Что же такое математика?» Рубен Херш говорит о том, что «интуиция в математике повсюду» (Hersh, 1999).

Но что такое интуиция? И почему математики полагаются на нее, а ученики почти никогда не делают этого на уроках? Учителя могут стимулировать учеников к применению интуиции при решении любой математической задачи, предложив им подумать, как можно найти ответ, прежде чем объяснять им соответствующий метод. Возможности для интуитивного мышления можно использовать на всех уровнях изучения математики. Учителя начальной школы могут еще до объяснения материала предложить ученикам найти свой метод решения задачи. Например, спросить, как найти площадь коврика, до того как давать формулу площади. В средних или старших классах можно спросить учеников, как вычислить высоту объектов, которые слишком высоки, чтобы просто измерить их, прежде чем объяснять возможные методы решения этой задачи (Boaler, Meyer, Selling, & Sun, б/д). В главе 1 шла речь об уроке по началам анализа, на котором ученикам еще до объяснения теории предложили выдвинуть предположение и интуитивно поразмышлять над поиском объема лимона. И чтобы применить этот прием, не нужно почти ничего менять в методе преподавания.

Предлагая ученикам воспользоваться интуицией в процессе размышлений над математической концепцией, им предоставляют возможность мыслить открыто и свободно. Когда я спросила группу третьеклассников, которые изучали материал по

математике в рамках разговоров о числах, что они думают об этом методе, мальчик Дилан сказал мне: «Ты свободен, ты можешь делать все, что захочешь. Ты можешь взять числа и разделить их на группы». Делия, одна из учениц, снимавшихся в фильме «Сверх меры» (втором документальном фильме режиссера фильма «Гонка в никуда»), аналогичным образом описывала свой опыт после того, как она начала заниматься математикой, основанной на исследованиях: «У меня есть связь с математикой, я открыта, я чувствую себя живой, у меня больше энергии». В том же фильме Нико сравнивает свой предыдущий опыт изучения математики, которое сводилось к решению целых страниц примеров, с коллективным, исследовательским подходом: «В прошлом году на уроках математики ты был один, каждый сам по себе, но в этом году уроки стали открытыми. Это как город, все мы вместе создаем прекрасный новый мир».

Меня неизменно поражают и вдохновляют слова, которые дети используют для описания математики, когда она становится открытой дисциплиной, когда им предлагают применить свои идеи и испытать опыт взаимодействия с творческой, красивой наукой. Они говорят: «Мы свободны», «Я открыта, я чувствую себя живой» и «Мы вместе создаем прекрасный новый мир», — и это свидетельствует о трансформирующем влиянии, которое может оказывать математика, основанная на исследованиях. Ученики говорят так, потому что им предоставлена интеллектуальная свобода, а это очень сильный и волнующий опыт. Когда мы предлагаем ученикам воспользоваться интуицией и мыслить свободно, у них формируется не только новое представление о математике, себе и мире, но и интеллектуальная свобода, которая кардинально меняет их отношение к учебе.

Дебора Болл написала увлекательную и провокационную статью, в которой цитирует легендарного психолога Джерома Брунера.

> Мы начнем с гипотезы, согласно которой любой предмет можно преподать эффективно и в достаточно адекватной форме любому ребенку на любой стадии развития. Это достаточно смелая гипотеза; если ее принять, она может определить и исходные позиции разработки программы обучения. Доказательств противного нет; и многое свидетельствует в ее пользу (Bruner, 1960; цит. по: Ball, 1993).

Многие могут усомниться в этом; мои студенты из Стэнфорда пришли в смятение, когда я впервые познакомила их с этой идеей. Но они охотно размышляли над способами обсуждения

концепций анализа с детьми младшего возраста. Дебора Болл твердо убеждена в целесообразности такого подхода; она говорит, что «дети проявляют интерес, размышляют и изобретают глубокие и сложные вещи» (Ball, 1993, p. 374). Если мы освободим учителей и учеников от иерархии преподавания математики, которую предписывают нормативные требования к содержанию учебной программы, и позволим им исследовать концепции более высокого уровня, которые могут быть весьма увлекательными (четвертое измерение, отрицательное пространство, исчисление или фракталы), у нас появится возможность приобщить их к истинному математическому воодушевлению и открыть им путь к исследованию интересных концепций в любом возрасте. Я не утверждаю, что нам следует преподавать формальную математику высокого уровня детям младшего возраста, но мне нравится возможность, о которой говорят Брунер и Болл: что любую область математики можно преподавать в достаточно адекватной форме в любом возрасте. Это захватывающая и важная идея.

Цените глубину больше, чем скорость

Вот что в первую очередь стоит изменить на уроках математики во всем мире: мысль о том, что здесь скорость важнее глубины. Математика страдает от этой идеи в большей степени, чем любой другой предмет, а из-за этого страдают и дети, изучающие ее. Но ведущие математики мира (Мариам Мирзахани, Стивен Строгац, Кит Девлин и Лоран Шварц, которые получили высшие награды за свою работу) говорят о том, что работают медленно и глубоко, без спешки. В главе 4 я привела цитату Лорана Шварца, в которой есть и такие слова: «Важно глубоко понимать суть вещей и их взаимосвязь друг с другом». Шварц говорит о том, что ощущал себя «тупым» в школе, потому что размышлял медленно, и призывает читателей понять, что суть математики — глубина и связи, а не поверхностное знание фактов и быстрая работа.

Математика — дисциплина, которая должна всегда придавать особое значение глубине мышления и связям. Во время недавнего визита в Китай у меня была возможность побывать на нескольких уроках математики в средних и старших классах разных школ. Китай со значительным отрывом превосходит все остальные страны по результатам тестов PISA и других тестов (PISA, 2012). Поэтому многие считают, что уроки математики в Китае сфокусированы на скорости и зубрежке. Но мои наблюдения показали нечто совершенно иное. На каждом уроке, за которым я наблюдала, учителя и ученики прорабатывали не более трех

вопросов за один урок продолжительностью один час. Учителя объясняли ученикам разные концепции (даже те, которые носят более определительный и шаблонный характер, чем другие концепции в математике, такие как концепция дополнительных и смежных углов) с установкой на исследования. Во время одного урока учительница вместе с учениками исследовала значение дополнительных и смежных углов, приводя примеры и предлагая «тщательно проанализировать вопрос», а затем обсудила с ними возникшие вопросы и идеи (видео можно посмотреть здесь: YouCubed at Stanford University, 2015d; www.youcubed.org/high-quality-teaching-examples/). Последовавшее за этим обсуждение проходило на таком уровне глубины, которого я не видела за весь свой опыт наблюдения за уроками математики по этой теме. Учительница брала идеи учеников и формулировала неправильные утверждения, чтобы ученики раскритиковали ее и класс проанализировал все возможные соотношения между углами, соответствующие определениям.

Ниже приведен фрагмент расшифровки типичного урока математики в США по теме дополнительных и смежных углов, который взят из видео, снятого в процессе изучения преподавания в разных странах в рамках исследования TIMSS[19] (Stigler & Hiebert, 1999).

> **Учитель**: Здесь мы имеем вертикальные и смежные углы. Какой угол является вертикальным по отношению к углу А?
>
> **Ученики (хором)**: 70 градусов.
>
> **Учитель**: А значит, угол А должен составлять?..
>
> **Ученики (хором)**: 70 градусов.
>
> **Учитель**: Теперь у вас есть смежные углы. Какой угол является смежным по отношению к А?
>
> **Ученики (хором)**: Угол Б.
>
> **Учитель**: Угол Б, а также…
>
> **Ученики**: Угол В.
>
> **Учитель**: Чему равна сумма смежных углов?
>
> **Ученики**: 180°.

В приведенном выше фрагменте мы видим вопросы с одним ответом, к которому учитель подводит учеников. Сравните это с уроком, который мы наблюдали в Китае и во время которого учительница не задавала таких вопросов, как «Чему равна сумма смежных углов?» Она задавала вопросы такого типа: «Могут ли два острых угла быть смежными? Могут ли два смежных угла быть острыми?» Такие вопросы требуют от учеников более глубоких размышлений об определениях и соотношениях. Ниже

представлен фрагмент урока в Китае, на котором я присутствовала и который очень отличается от урока в США.

> **Ученик**: Как он только что сказал, если есть два равных угла, сумма величин которых равна 180°, это должны быть два прямых угла. Поскольку величины острых углов всегда меньше 90°, сумма величин двух острых углов не будет больше 180°.
>
> **Учитель**: Следовательно, если два угла смежные, они должны быть тупыми?
>
> **Ученик**: Нет.
>
> **Учитель**: Нет? Почему? Думаю, если два угла являются смежными, они должны быть тупыми.
>
> **Ученик**: Я считаю, что это может быть один острый и один тупой угол.
>
> **Учитель**: Он говорит, что, хотя два смежных угла не могут быть острыми, это могут быть один острый и один тупой угол.
>
> **Ученик**: Например, как угол 1 и угол 5 в том вопросе. Один острый, другой тупой.
>
> **Учитель**: Хорошо. Если есть два смежных угла, хотя бы один из них острый.
>
> **Другие ученики**: Нет, хотя бы один угол должен быть больше 90°.
>
> **Ученик**: Есть исключение: когда оба угла прямые.

Уроки в США и Китае кардинально отличаются друг от друга. В США учитель ставит ученикам процедурные вопросы, а те дают единственный возможный ответ. Вопросы учителя, будто взятые из учебника, касались простого примера с углами, а ученики давали определения, которые они изучили. На уроке в Китае учительница не ставила вопросы в духе «закончите это предложение»; она выслушивала идеи учеников и формулировала провокационные утверждения, которые помогали ученикам глубже понять суть изучаемого материала. Утверждения учительницы побуждали учеников выдвигать в ответ гипотезы и аргументы, размышляя о соотношениях между разными углами.

Во второй части урока основное внимание уделялось диаграммам, которые могли нарисовать ученики, чтобы проиллюстрировать изученные соотношения между углами. Дети составляли разные диаграммы, меняя направление и двигая по кругу лучи и стороны треугольников. Они обсуждали идеи друг с другом и с учительницей, задавая вопросы по поводу этих идей и развивая их до такой глубины, какой я не могла себе даже представить, пока не побывала на том уроке. Когда ученики

обсуждали диаграммы соотношений между углами, один из них сказал: «Это просто захватывающе». Вряд ли найдется много учеников, которые пришли бы к такому выводу на уроке в США.

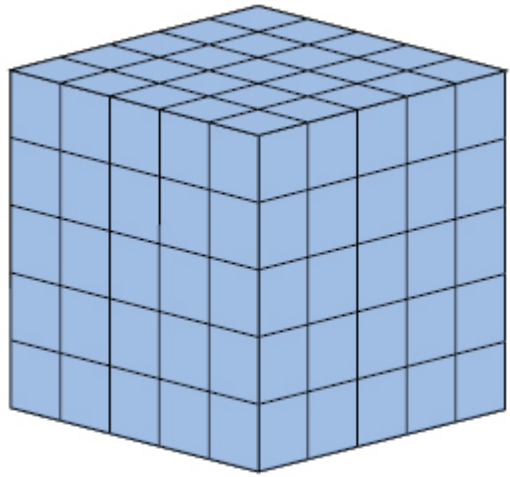
В ходе видеоисследования TIMSS был проведен сравнительный анализ подхода к преподаванию в США и других странах. По результатам был сделан вывод о том, что в США уроки «в милю шириной и дюйм глубиной» (Schmidt et al., 2002), а в других странах, особенно в Японии, они носят более концептуальный и глубокий характер, подразумевают более активное обсуждение изучаемого материала учениками. Этот анализ позволил установить связь между глубиной обсуждения и работы в Японии (в отличие от США) и более высоким уровнем успеваемости в стране (Schmidt et al., 2002; Schmidt, McKnight, & Raizen, 1997).

Многие родители не понимают важность математической глубины; они ошибочно полагают, что их детям пойдет на пользу ускоренное изучение материала. Такие родители делают все возможное, чтобы их дети досрочно переходили в следующие классы и им как можно раньше преподавали математику на углубленном уровне. Но изучение математики — не гонка, а математическая глубина вдохновляет учеников и обеспечивает их вовлеченность и эффективную работу, готовя их к углубленному изучению математики в будущем. Именно ученики, которых вынуждают быстрее проходить материал, чаще всего при первой же возможности бросают математику (Jacob, 2015; also Boaler, 2015b). Необходимо, чтобы все ученики занимались математикой с полной отдачей; ни для кого она не должна быть слишком легкой и никого нельзя заставлять повторно отрабатывать те или иные концепции, если он уже усвоил их. Один из лучших и самых важных способов стимулирования сильных учеников состоит в том, чтобы дать им возможность глубже изучать концепции. Причем они могут делать это вместе с другими учениками, которые способны глубже проанализировать эти концепции в другие дни. В работе со своими студентами из Стэнфорда я использую такой метод: предложить тем, кто закончил задание, расширить его, двигаясь в новом направлении.

Недавно я поставила своим студентам из Стэнфорда задачу под названием «Раскрашенный куб» и раздала им коробки с кубиками сахара, чтобы они могли смоделировать ее (пример 9.7 и рис. 9.7).

ПРИМЕР 9.7. РАСКРАШЕННЫЙ КУБ

Представьте себе куб $5 \times 5 \times 5$, внешние грани которого раскрашены в один цвет, причем этот куб состоит из меньших кубиков размером $1 \times 1 \times 1$.



Ответьте на следующие вопросы.

У скольких маленьких кубиков будет 3 раскрашенные грани?

У скольких маленьких кубиков будет 2 раскрашенные грани?

У скольких маленьких кубиков будет 1 раскрашенная грань?

У скольких маленьких кубиков не будет раскрашенных граней?

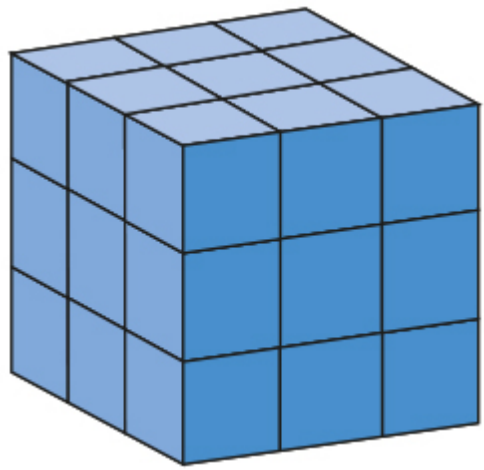


Рис. 9.7. Раскрашенный куб $3 \times 3 \times 3$

Некоторые студенты выполнили задачу, построив куб меньшей размерности (например, 3 × 3 × 3) из кубиков сахара, и разрисовали внешние грани, чтобы проанализировать распределение кубиков с разным количеством раскрашенных граней. Я сказала им, что после решения задачи для куба размерами 5 × 5 × 5 они могут расширить задачу каким угодно способом. Это была лучшая часть урока: у студентов появлялось гораздо больше возможностей для обучения, поскольку разные группы анализировали, например, как найти решение задачи с пирамидой вместо куба (рис. 9.8); одна группа анализировала соотношения в пирамиде, составленной из пирамид меньшего размера, а еще одна работала над соотношениями в случае перемещения куба в четвертое измерение, а затем и в *n*-е.

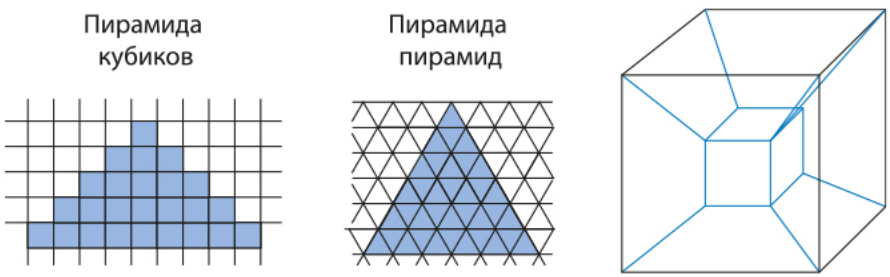


Рис. 9.8. Расширенная задача с кубом

Если дать ученикам возможность расширять задачи, они почти всегда находят творческие и увлекательные возможности для углубленного анализа математических концепций, что для них очень ценно.

Свяжите математику с реальным миром с помощью моделирования

Школьники объясняют свою неприязнь к математике в первую очередь ее абстрактным характером и якобы несоответствием реальному миру. Как ни печально, это отражает преподавание математики в школе: ведь на самом деле она повсюду. Она настолько важна для успешной жизни, что ее назвали новым «гражданским правом» — важным элементом эффективного функционирования в обществе (Moses & Cobb, 2001). Когда я проводила интервью с группой молодых людей в возрасте 24 лет, которые только что получили традиционное математическое образование, и спросила их о роли математики в их жизни и работе, они выразили разочарование в связи с полученным образованием. Эти молодые люди сказали, что видят математику повсюду в окружающем мире и каждый день

используют ее в своей работе, но опыт ее изучения в учебных заведениях не дал им ощущения реальной природы математики и ее важности для их будущего. По их словам, если бы они знали, что математика — не мертвая дисциплина, не имеющая отношения к реальности, и что она может сыграть важную роль в их взрослой жизни, это полностью изменило бы их мотивацию на уроках в школе.

Необходимость сделать математику интересной и связанной с реальным миром часто приводит к тому, что ее ставят в ситуацию, которую я называю «псевдоконтекстом» (Boaler, 2015a), призванным отражать реальность. Ученики работают над придуманными задачами из реального мира, которые далеки от реальности, как в случае поездов, которые мчатся навстречу друг другу по одному пути. Такой контекст не помогает ученикам узнать, что математика — полезная дисциплина. Он создает противоположное впечатление: будто математика — нечто чуждое и нереальное. Чтобы ученики могли успешно решать искусственные задачи из реального мира, им предлагают представить себе, что ситуация реальна, игнорируя при этом все, что они знают о жизни. Возьмем в качестве примера такие типичные задачки.

• Джо может выполнить работу за 6 часов, а Чарли — за 5 часов. Какую часть работы они могут выполнить, работая вместе 2 часа?

• Ресторан берет 2,5 доллара за $^1/_8$ часть пирога. Сколько стоит весь пирог?

• Пицца разделена на 5 кусочков для 5 друзей на вечеринке. Три друга съедают свои кусочки пиццы, но потом приходит еще 4 друга. На сколько частей следует поделить два оставшихся кусочка пиццы? (Boaler, 2015a)

Все эти вопросы взяты из опубликованных учебников, подобные задачи дети решают на уроках математики. Однако они лишены смысла. Всем известно, что люди работают вместе не с той же скоростью, что и по отдельности; рестораны назначают другую цену на большие порции, а если на вечеринку приходит больше друзей, заказывают еще одну пиццу — никто не режет оставшиеся кусочки. В итоге дети приходят к выводу, будто математика не имеет отношения к реальной жизни. На самом деле многие считают, что, приходя на урок математики, они попадают в *Страну математики* — причудливое и загадочное место, которое требует, чтобы они оставили свой здравый смысл за дверью.

Как же помочь ученикам увидеть широкое применение

математики и ее практическую ценность, не прибегая к псевдоконтексту? В мире есть множество удивительных ситуаций, которые можно объяснить с помощью математики. Мой онлайн-курс помог слушателям понять это, показав им математику в снежинках, работе пауков, жонглировании и танцах, а также в криках дельфинов. Такая математика охватывает все уровни: от начальной школы до старших классов (Stanford Online Lagunita, 2014). Не все математические задачи могут или должны быть помещены в контекст реального мира: некоторые из самых замечательных задач, с помощью которых школьники осваивают количественное мышление, не имеют контекста. Но важно сделать так, чтобы ученики хотя бы время от времени видели применимость математики и работали с переменными из реального мира.

Конрад Вольфрам призывает тех, кто смотрит его выступление на TED, рассматривать математику как дисциплину, во главе угла которой находится постановка вопросов и формирование математических моделей (Wolfram, 2010). Он подчеркивает, что моделирование занимает центральное место в математике этого мира. В стандартах Common Core также делается акцент на моделировании как стандартной математической практике.

Моделирование с помощью математики

На мой взгляд, один из важнейших аспектов вклада стандартов Common Core состоит в том, что они включают в себя математическую практику: действия, которые важны для математики и которые ученикам необходимо выполнять, осваивая эту науку. «Моделирование с помощью математики» — один из восьми стандартов математической практики (см. врезку).

МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИКИ

Учащиеся, владеющие математикой, могут применять свои знания к решению задач, которые возникают в повседневной жизни, в обществе и на работе. В начальных классах это может быть составление числового выражения со сложением для описания ситуации. В средней школе ученик может применить пропорциональное рассуждение для планирования школьного события или анализа проблемы, возникшей в местном сообществе. В старших классах он может

использовать геометрию для решения конструкторской задачи или применить функцию для описания того, как одна искомая величина зависит от другой. Учащиеся, которые владеют математикой и могут применить свои знания на практике, не боятся делать предположения и приближения, чтобы упростить сложную ситуацию, осознавая, что позже их, возможно, придется пересмотреть. Они способны выявить важные величины в практической ситуации и составить схему соотношения между ними с помощью таких инструментов, как диаграммы, таблицы с двумя входами, графики, блок-схемы и формулы. Они могут проанализировать эти соотношения математическими методами, чтобы сделать выводы. Они систематически интерпретируют полученные математические результаты в контексте ситуации и размышляют о том, имеют ли эти результаты смысл, после чего могут усовершенствовать модель, если она не соответствует своему назначению.

Источник: Common Core State Standards Initiative, 2015.

Акт моделирования можно рассматривать как упрощение задачи из реального мира и ее приведение к чистому математическому виду, который помогает решить ее. Моделирование осуществляется во всех областях математики, но ученики, как правило, не знают о том, что занимаются им, или им не предлагали поразмышлять над этим.

Рон Федкив — специалист по прикладной математике Стэнфордского университета, который занимается компьютерными спецэффектами. Его математические модели легли в основу спецэффектов в таких признанных фильмах, как «Пираты Карибского моря: сундук мертвеца» и «Звездные войны. Эпизод III. Месть ситхов». Федкив занимался чистой математикой до 23 лет, после чего перешел в область прикладной математики. На работе он создает новые алгоритмы, позволяющие вращать объекты, имитировать столкновения и «математически соединять слои падающей капли воды».

Математическое моделирование используется также в уголовных делах и помогло раскрыть много громких убийств. NUMB3RS («Числа») — успешный телесериал об агенте ФБР, который часто прибегает к помощи своего брата-математика. В первом эпизоде представлена реальная история о жестоком серийном убийце. Агенты ФБР отслеживали места, где побывал маньяк, но не могли увидеть закономерность. Оказавшись в тупике, агент ФБР вспомнил, что его брат-математик всегда

называет математику наукой о закономерностях. Он попросил брата о помощи. Математик проанализировал ситуацию с учетом важной информации о серийных убийцах, в частности того факта, что они чаще всего нападают на своих жертв неподалеку от дома, но оставляют буферную зону, в пределах которой не совершают нападений. Он пришел к выводу, что может определить закономерность с помощью упрощенной математической модели. Она позволяла выявить «горячую зону», в которой с большой вероятностью мог жить серийный убийца. Агенты ФБР допросили всех мужчин определенного возраста, которые жили в этой зоне, и дело было раскрыто. Этот эпизод основан на трудах математика Кима Россмо, разработавшего метод определения географического местоположения преступника (Criminal Geographic Targeting, CGT) с использованием математических моделей, который применяют стражи порядка во всем мире.

Предлагая ученикам взять задачу из реального мира, основанную на реальных данных и ограничениях, и решить ее с помощью математики, мы тем самым предлагаем им смоделировать соответствующую ситуацию. По словам Вольфрама, ученики должны столкнуться с задачей реального мира или найти ее, составить модель решения, выполнить вычисления (возможно, с помощью калькулятора или компьютера), а затем выяснить, верен ли полученный ответ или модель необходимо усовершенствовать. Он обращает внимание на то, что сейчас ученики тратят 80% времени на уроках математики на выполнение вычислений, а вместо этого им следует работать над тремя другими аспектами: созданием моделей, их уточнением и использованием для решения реальных задач.

На уроках алгебры ученикам часто предлагают вычислить что-то, а не создать модель с использованием алгебры. Возьмем в качестве примера такую задачу.

> Человек, который придерживается диеты, идет в магазин, чтобы купить индюшатины. Ему дают три кусочка, общий вес которых составляет $1/3$ фунта, но в диете сказано, что он может съесть только $1/4$ фунта. Какую часть купленного мяса может съесть этот человек, чтобы не нарушить диету?

Для многих это трудная задача. Но проблемы, с которыми сталкивается большинство, связаны не с вычислениями, а с созданием модели решения. Я много где писала об элегантных визуальных решениях, которые нашли дети для этой задачи (Boaler, 2015a). Вот то, которое предложил один ученик

четвертого класса.

Если три кусочка весят $^1/_3$ фунта, то один фунт можно представить в виде 9 кусочков, как показано на рис. 9.9.

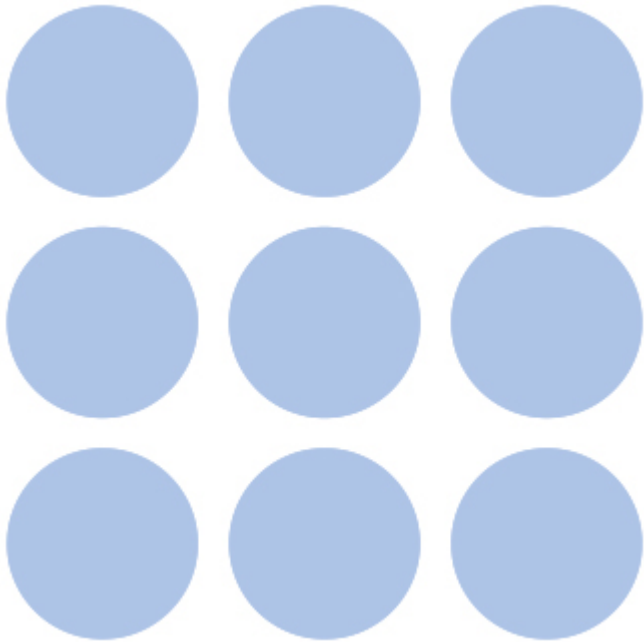


Рис. 9.9. Девять кусочков

Если он может съесть четверть фунта, то это количество, отображенное в одном квадранте на рис. 9.10, что составляет $2^1/_4$ кусочка.

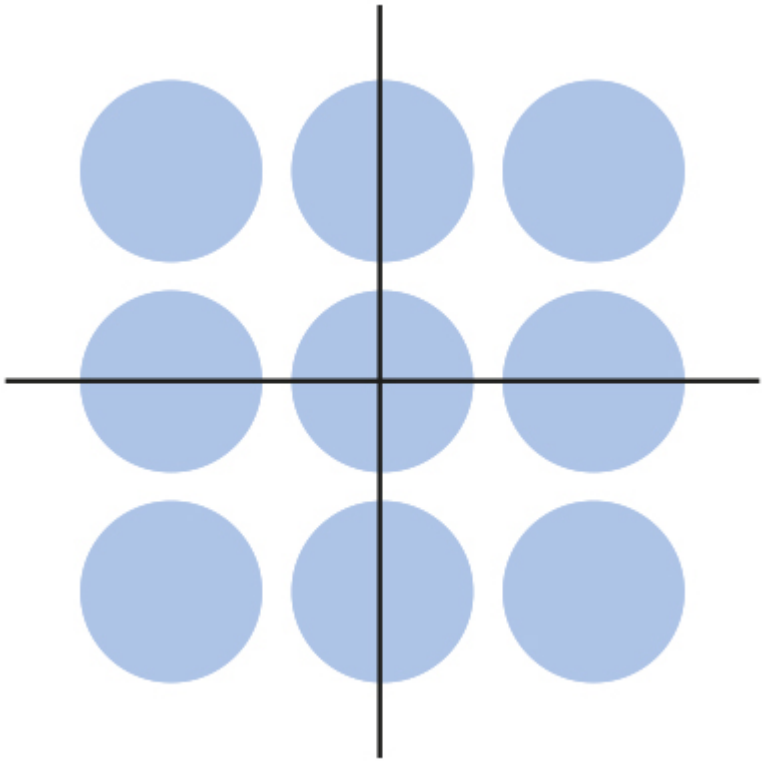


Рис. 9.10. Девять кусочков, разделенных на квадранты

Взрослые же изо всех сил старались решить задачу традиционными методами: они либо неправильно умножали, либо пытались применить алгебру, но не помнили, как именно это делать. Чтобы использовать алгебру, им нужно было сказать:

$$x \text{ кусочков} = {}^{1}/_{4} \text{ фунта}$$

…а затем применить метод перекрестного умножения и получить $x = 9/4$.

У взрослых, которым ставили эту задачу, возникали трудности с созданием модели и составлением выражения. На уроках алгебры дети почти не получают опыта интерпретации ситуаций и создания моделей. Их учат перемещать переменные на странице и решать множество примеров, но они редко занимаются постановкой задач, а это и есть важный аспект того, о чем говорит Вольфрам: создания модели.

Моделированием могут заниматься люди всех возрастов. Например, ученикам подготовительного класса начальной школы можно предложить составить схему размещения детей в классе, чтобы все они могли поместиться на ковре. Ученики могут

представить каждого ребенка в виде какой-нибудь фигуры и найти подходящий способ их размещения на ковре. Это пример моделирования ситуации, в данном случае с помощью фигур или предметов, символизирующих более сложные объекты (маленьких детей!): YouCubed at Stanford University, 2015b; www.youcubed.org/task/moving-colors.

Математические модели часто отличаются большей простотой по сравнению с реальными ситуациями. В примере с подготовительным классом фигуры, символизирующие детей, не учитывают их размер или движения. В примере с кусочками индюшки подразумевается, что все они имеют одинаковый размер и вес и между ними нет никаких различий.

Эта задача помещена в нереальный контекст, но он позволяет ученикам проанализировать разные аспекты реальной ситуации и использовать их в своих размышлениях. Вероятно, ученики захотят определить площадь участка, по которому должен ходить козлик. Либо сами ученики, либо учитель может предложить оградить участок забором. Отличное расширение этой задачи состоит в том, чтобы предложить ученикам определить, как они разместят 60 планок шириной 30 см, чтобы максимально увеличить дополнительную площадь. Это замечательная, содержательная задача, о которой шла речь в главе 5. Размышляя о посадке дерева, ученики могут задать себе вопрос: что будет, если козлик съест саженец? Какое дерево лучше всего посадить? Где его лучше посадить, чтобы козлик его не съел, но мог быть в тени?

Хорошая задача на моделирование, над которой могут работать ученики средних и старших классов, — известная задача о привязанном козлике. Ее расширенный вариант, представленный в примере 9.8, составила Кэти Уильямс.

ПРИМЕР 9.8. ПРИВЯЗАННЫЙ КОЗЛИК

Представьте себе козлика, привязанного веревкой в углу затененного участка площадью 1×2 м. Длина веревки равна 2 м.

Что еще нужно знать об этой ситуации?

Представьте эту ситуацию в виде рисунка.

Какие вопросы у вас возникли?

Солнце восходит на востоке затененного участка и садится на западе. Козлик хотел бы оставаться в тени. Где лучше посадить дерево? Какое дерево вы посадили

бы?

В этой ситуации есть много возможностей для того, чтобы ученики задавали содержательные вопросы и искали на них ответы. Им понадобилось бы смоделировать эту ситуацию и представить ее в разных формах, то есть применить два важных математических подхода (рис. 9.11).

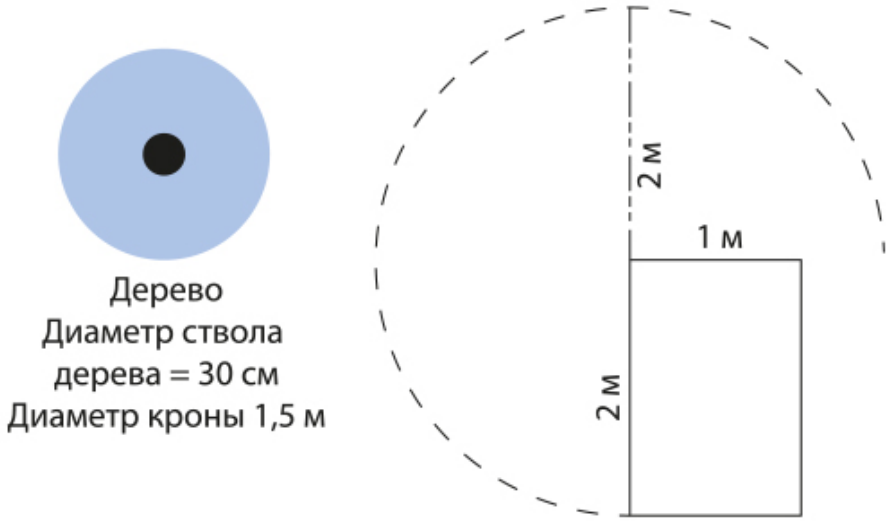


Рис. 9.11. Модель ситуации с привязанным козликом

Один из замечательных способов использовать реальные данные — предложить ученикам поработать с реальными числами и данными из журналов, газет и интернета. Например, мне очень нравится знакомить детей с вопросами социальной справедливости, предлагая им сформировать в классе группы, соответствующие разным континентам. Затем ученики анализируют, сколько печенья получит их группа, если оно символизирует долю мирового богатства, которая приходится на их континент (пример 9.9). Работая над этой задачей, ученики будут создавать модели, рассуждать и применять знания, а также изучать реальную и важную информацию об этом мире и о способах распределения богатства, что для них особенно актуально в пересчете на печенье, которое они смогут съесть. Поскольку ученики в некоторых частях мира получают совсем мало печенья, лучше сделать запас, чтобы выравнять потребление в будущем!

ПРИМЕР 9.9. МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Определите процент населения, живущего на каждом континенте, от общей численности населения мира.

2. Вычислите количество учеников нашего класса, соответствующих найденным процентам.

3. Вычислите процент мирового богатства, которое приходится на каждый континент.

4. Вычислите богатство каждого континента в количестве печенья.

Таблица 9.1. Данные о мировом богатстве

Континент	Население (млн чел.), 2000 г.	Процент населения	Богатство (ВВП, трлн долл.)	Процент богатства
Африка	1136		2,6	
Азия	4351		18,5	
Северная Америка	353		20,3	
Южная Америка	410		4,2	
Европа	741		24,4	
Океания/Австралия	39		1,8	
Всего	7030	100	71,8	100

Источник: данные о численности населения получены на основании информации Справочной службы по вопросам народонаселения (Population Reference Bureau, prb.org). Данные о мировом богатстве получены на основании информации Международного валютного

фонда.

Таблица 9.2. Данные, полученные в классе
Количество учеников в классе ___
Общее количество печенья ___

Континент	Процент населения	Количество учеников в классе	Процент богатства	Количество печенья
Африка				
Азия				
Северная Америка				
Южная Америка				
Европа				
Океания/Австралия				
Всего	100		100	

Источник: предоставлено Шармейн Мэнгем.

Данные об Олимпийских играх и других спортивных соревнованиях открывают множество возможностей для математических изысканий и размышлений. Работая со спортивными данными, важно помнить о гендерном равенстве. В примере 9.10 представлен мой любимый вопрос, который также подразумевает создание математической модели.

ПРИМЕР 9.10. ФУТБОЛЬНЫЙ ВРАТАРЬ

Если вы футбольный вратарь, а нападающий команды противника оторвался от остальных и бежит к вам, какую позицию вам лучше занять? Попытайтесь определить разные позиции в зависимости от местоположения нападающего в момент, когда он сделает удар.

Чтобы привнести элемент реальности в учебные аудитории, я советую использовать подлинные данные и ситуации, давая контекст только тогда, когда он нужен. Убедитесь, что это не заставит учеников отказаться от осмысления происходящего и ухода в Страну математики.

Группа PISA при ОЭСР провела интересный и полезный анализ сильных и слабых сторон, которые продемонстрировали американские ученики в ходе международных тестов PISA по математике. По результатам этого анализа исследователи пришли к выводу, что низкий уровень знаний американских школьников связан с искусственным контекстом, который используется на уроках и не знакомит учеников с принципами применения переменных из реального мира, а учит игнорировать их. Ниже приведены полезные рекомендации PISA в части способов вовлечения учеников и создания условий для успешного изучения математики.

Создается впечатление, что американские школьники особенно сильны в применении математических навыков и способностей, менее требовательных в когнитивном плане, таких как выделение отдельных значений на диаграммах и операции с хорошо структурированными формулами. Но у них слабо развиты когнитивные навыки и способности, необходимые для того, чтобы тщательно анализировать реальные ситуации, переводить их в математические категории и интерпретировать математические аспекты в задачах реального мира. Хорошо известная поверхностная учебная стратегия «Не обращайте внимания на контекст, возьмите из текста числа и выполните очевидные действия» обречена на провал.

> Она широко применяется во всем мире и часто помогает учащимся справляться с математикой в школе и сдавать экзамены. Но в процессе выполнения типичного задания теста PISA на математическую грамотность учащиеся должны использовать знания, опирающиеся на прочный фундамент. Очевидно, что у американских школьников возникают большие трудности с такими задачами. <…> Что касается последствий, тут есть одна четкая рекомендация: уделять гораздо больше внимания видам деятельности более высокого порядка, таким как математическое моделирование (осмысление ситуаций из реального мира, их перенос на математические модели и интерпретация математических результатов), без ущерба для базовых навыков, необходимых для этих видов деятельности (Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2013).

Команда PISA обнаружила феномен, проистекающий из недостатков заданий, которые дают ученикам в США. Члены команды обратили внимание на то, что склонность учеников игнорировать контекст и просто использовать числа приводит к тому, что они не справляются с заданиями. Это отражает низкое качество заданий с искусственным контекстом, которые используются в учебниках в США. К сожалению, стратегии, которые обычно изучают американские школьники на уроках, не принесут им пользы и после вступления в трудовую жизнь. На уроках математики ученики должны работать над заданиями, которые требуют изучения реальной ситуации, использования переменных из реального мира и анализа подлинных данных. Им необходимо научиться создавать математические модели на основе реальных ситуаций и решать задачи. Это увлекательный процесс, чрезвычайно важный для будущего учеников.

Стимулируйте учеников ставить вопросы, рассуждать, обосновывать свои выводы и быть скептиками

Математик должен сразу поставить интересный вопрос. Этот метод практически не применяется на уроках, хотя и играет важнейшую роль в математической работе. Ник Фут — замечательный учитель третьего класса и друг, который учил обеих моих дочерей, что дало нам возможность часто обсуждать вопросы математики. Иногда на своих уроках он описывает ситуацию и предлагает ученикам поставить математические вопросы. Однажды я присутствовала на уроке Ника, когда он дал ученикам такое задание.

Вы хотите купить браслеты из резинок. Для этого вы отправляетесь в магазин и находите там следующие варианты.

Двухцветные браслеты — 0,5 долл. за один браслет или 3 браслета за 1 долл.

Многоцветные браслеты — 1 долл. за один браслет или 3 браслета за 2,5 долл.

Материалы, необходимые для самостоятельного изготовления браслета

Пакет с 600 резинками — 3 долл. или 4 пакета за 10 долл.

Пакет с 600 резинками, светящимися в темноте, — 5 долл.

Станок Wonder Loom.

Затем Ник предложил группам учеников обсудить эту ситуацию и сформулировать вопросы. В примере 9.11 показан рабочий лист, который он выдает ученикам для выполнения этого задания.

ПРИМЕР 9.11. МЫ ХОТЕЛИ БЫ ЗНАТЬ

Члены группы:

Дата:

Мы хотели бы знать: _____

Используйте рисунки, числа и слова, чтобы показать, как вы ответили на этот вопрос.

Мы хотели бы проанализировать: _____

Используйте рисунки, числа и слова, чтобы показать, как вы ответили на этот вопрос.

Ученики с воодушевлением начали размышлять над такими вопросами: почему готовые браслеты обходятся так дорого? Они смогли найти ответ, выяснив, во сколько обошлось бы самостоятельное изготовление браслетов, а затем проанализировав затраты на продажи через магазин. Ученики задавали реальные вопросы, которые требовали большей вовлеченности и обучения.

После выхода на рынок труда в нашем высокотехнологичном мире от учеников будут ожидать выполнения одной очень важной работы: постановки вопросов в связи с различными ситуациями или большими объемами данных. Компаниям все чаще приходится иметь дело с огромными массивами данных, поэтому

сотрудников, которые умеют задавать творческие и интересные вопросы, будут высоко ценить на работе. Когда я предлагала ученикам рассмотреть ту или иную ситуацию и сформулировать свои вопросы, они сразу включались в работу, с воодушевлением опираясь на собственные идеи. Такой метод легко реализовать на уроках математики, и его необходимо время от времени использовать. Люди должны иметь возможность освоить его в школе, чтобы быть готовыми к его применению в дальнейшей жизни.

Рассказывая о своей роли в качестве работодателя, Конрад Вольфрам говорит, что ему не нужны сотрудники, которые умеют быстро считать, поскольку это могут делать компьютеры. Ему нужны сотрудники, способные выдвигать гипотезы и говорить о своих математических методах. Крайне важно, чтобы сотрудники рассказывали о своих математических методах другим членам команды: тогда остальные также смогут воспользоваться этими методами в своей работе и исследованиях и смогут увидеть, есть ли ошибки в соответствующих размышлениях или логике. В этом и состоит суть математической работы, которая называется рассуждением.

Я беседую о стандартах Common Core по математике со многими родителями, и мне часто задают такой вопрос (особенно родители сильных учеников): «Зачем моему ребенку обсуждать свою работу в группе, если он может сам получить все ответы?» Я говорю таким родителям, что объяснение своей работы — практика, которая называется логическим рассуждением и лежит в основе математики. Когда ученики выдвигают доводы в пользу своих идей и обосновывают свой ход мыслей, они занимаются истинной математикой. Ученые предлагают теории и ищут примеры, которые доказывают или опровергают эту теорию. Математики предлагают теории и рассуждают о своих математических методах, обосновывая установленные ими логические связи между этими идеями (Boaler, 2013c).

В главе 5 шла речь об учебной стратегии, в соответствии с которой ученикам предлагают быть скептиками, побуждая друг друга к высокому уровню рассуждений. Это превосходный способ научить учеников рассуждать и брать на себя роль скептиков, что им очень нравится. Как было сказано в главе 5, рассуждение — не только важнейшая математическая практика, но и учебная, которая обеспечивает равенство, предоставляя всем доступ к идеям. Выступая в роли скептиков, ученики получают возможность задавать вопросы другим; при этом им не приходится брать на себя роль того, кто ничего не понимает.

Используйте современные технологии и развивающие материалы

Показывая ученикам мир открытой, визуальной и творческой математики, целесообразно использовать разные элементы современных технологий и развивающие материалы. Счетные палочки Кюизенера, соединяющиеся кубики и занимательная мозаика помогают учащимся на всех уровнях; я использую их даже в работе со студентами Стэнфорда. В главе 4 представлен анализ приложений и игр, которые также развивают концептуальное и визуальное мышление. В главе 4 я сфокусировалась на числах, но есть много хороших приложений, позволяющих ученикам исследовать геометрические идеи в двух или трех измерениях, перемещая углы и прямые, чтобы изучить соотношения. Это важные и эффективные размышления, которые невозможно выполнить с помощью ручки и бумаги. Приложения Geometry Pad для iPad и GeoGebra позволяют учителям и ученикам создавать свои динамичные изображения и исследовать геометрические и алгебраические понятия, такие как $y = mb + x$, и тригонометрические функции в режиме динамического визуального отображения. Приложение Geometry Pad выпускает компания Bytes Arithmetic; его базовая версия есть в бесплатном доступе.

Другие приложения, например Tap Tap Blocks, помогают ученикам строить объекты в трех измерениях, создавая и решая пространственные и алгебраические закономерности (см. рис. 9.12). Ученики могут размещать и вращать объекты в искусственно созданном трехмерном пространстве. Tap Tap Blocks — бесплатное приложение, работающее на базе iOS, которое разработал Пол Хангас.

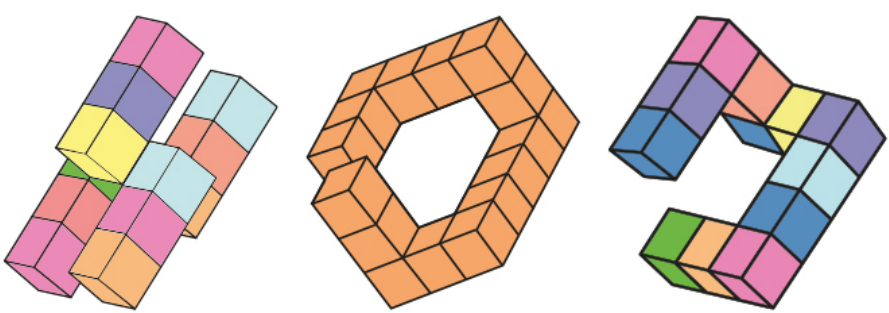


Рис. 9.12. Tap Tap Blocks

С помощью приложения можно предложить ученикам выполнить такое задание: создать фигуру, сделать несколько ее скриншотов с разных сторон, а затем предложить одному из

друзей составить свою фигуру (см. рис. 9.13).

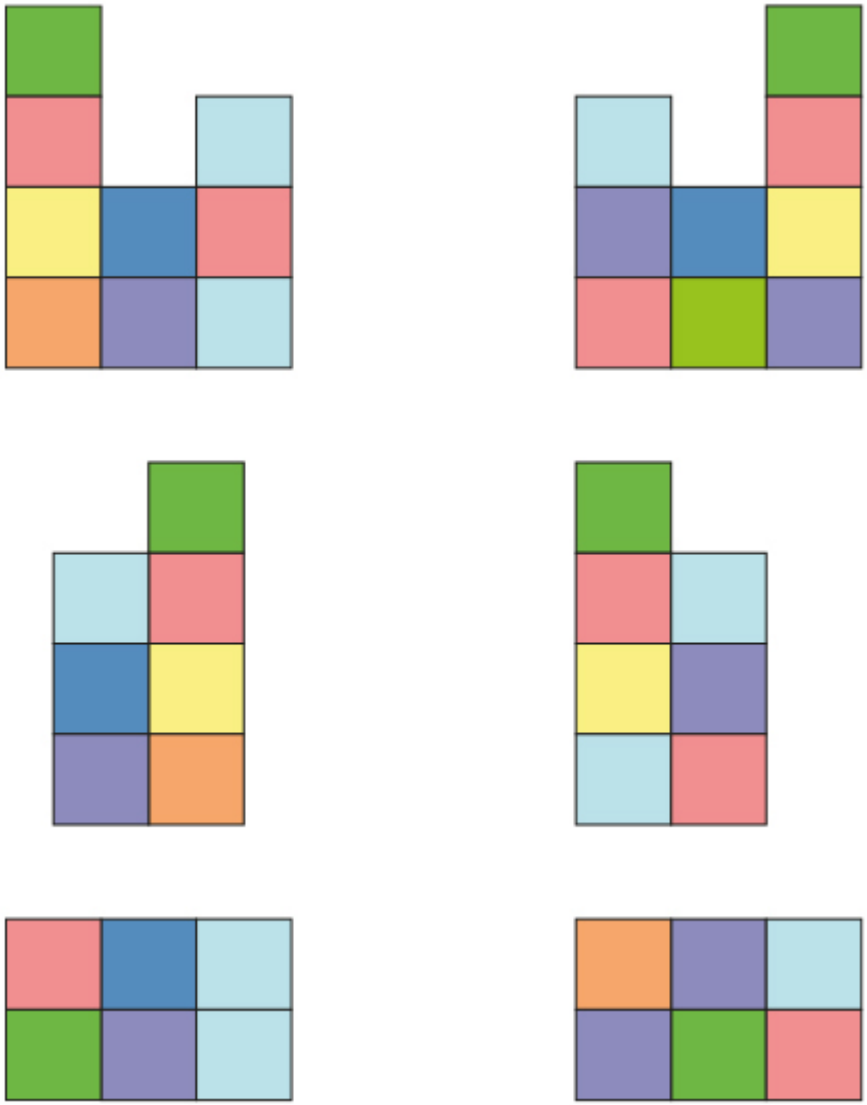


Рис. 9.13. Вид фигуры, созданной в приложении Tap Tap Blocks, с шести разных сторон

> Можешь ли ты построить свою фигуру, в которой 1 оранжевый, 1 желтый, 1 синий, 2 зеленых, 2 голубых, 2 красных и 3 фиолетовых блока? Вот несколько скриншотов этой фигуры с разных сторон.

Все эти программы предлагают эффективный способ вовлечения учеников в процесс концептуального и визуального мышления, но есть и другие приложения, игры и сайты,

обеспечивающие такую возможность. Существует множество приложений и игр, которые якобы могут помочь ученикам, но немногие из них опираются на результаты исследований по теме обучения, чтобы представить математику как концептуальную и визуальную дисциплину. Я рекомендую избирательно подходить к выбору технологий для работы с учениками и использовать только то, что стимулирует их размышлять и выдвигать гипотезы, а не развивать скорость выполнения процедур и вычислений.

Математика — широкая, многоплановая дисциплина, и когда учителя будут учитывать ее многоплановость при преподавании и оценке знаний, гораздо больше учеников получат доступ к математике и испытают воодушевление в связи с этим. Открывая математику, мы увеличиваем число и расширяем круг учеников, которые смогут успешно заниматься этой дисциплиной. Это не искусственное расширение или упрощение; это скорее такое расширение, которое приближает школьную математику к истинной и к математике реального мира.

Резюме

У учителей, родителей и руководителей есть возможность направить учеников на математический путь, ориентированный на мышление роста, который приведет их к большим достижениям, счастью и высокой самооценке на протяжении всей жизни. Необходимо избавить молодых людей от деструктивных представлений о том, что неудачи недопустимы, нельзя совершать ошибки, математика доступна только избранным, а успех должен даваться легко. Необходимо приобщить их к творческой, красивой математике, позволяющей ставить вопросы, которых еще никто не ставил, или выдвигать идеи, выходящие за традиционные и мыслимые пределы. Надеюсь, эта книга подарила вам идеи, которые помогут вам начать или возобновить свой путь к творческой, развивающей математике и мышлению роста, по которому вы будете следовать всю жизнь. Создавая условия для открытой математики и подавая сигналы в отношении изучения этой дисциплины, которые ее поддерживают, мы формируем свою интеллектуальную свободу в качестве учителей и родителей, а также пробуждаем такую свободу в других людях.

Благодарю вас, что отправились в это путешествие вместе со мной. Теперь пришло время привлечь других на тот путь, о котором вы здесь узнали, предложив им стать такими, какими они должны быть: свободными от искусственных правил и

вдохновленными знанием о том, что у них есть безграничный математический потенциал. Все мы можем открыть математику и дать ученикам шанс ставить вопросы и проявить естественную изобретательность и любознательность при изучении этой дисциплины. Обеспечив детям такой опыт изучения творческой, развивающей математики, мы изменим их и их способы взаимодействия с окружающим миром.

Предоставив ученикам свободу, мы получим красивую математику.

Источники

Гладуэлл М. Гении и аутсайдеры. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016.

Дуэк К. Гибкое сознание. Новый взгляд на психологию развития взрослых и детей. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013.

Лакатос И. Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы. М.: ЛКИ, 2010.

Abiola O., Dhindsa H. S. Improving classroom practices using our knowledge of how the brain works // International Journal of Environmental & Science Education. 2011. Vol. 7 (1). Pp. 71–81.

Baker D. P., LeTendre G. K. National differences, global similarities: World culture and the future of schooling. Stanford, CA: Stanford University Press, 2005.

Ball D. L. With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary mathematics. The Elementary School Journal. 1993. Vol. 93 (4). Pp. 373–397.

Beaton A. E., O'Dwyer L. M. Separating school, classroom and student variances and their relationship to socio-economic status // D. F. Robitaille, A. E. Beaton, eds. Secondary analysis of the TIMSS data. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Beilock S. L., Gunderson E. A., Ramirez G., Levine S. C. Female teachers' math anxiety affects girls' math achievement // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2009. Vol. 107 (5). Pp. 1860–1863.

Beilock S. Choke: What the secrets of the brain reveal about getting it right when you have to. New York: Free Press, 2011.

Black P., Harrison C., Lee C. et al. Working inside the black box: Assessment for learning in the classroom. London: Department of Education & Professional Studies, King's College, 2002.

Black P. J., Wiliam D. Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, 1998a, October. Pp. 139–148.

Black P. J., Wiliam D. Assessment and classroom learning // Assessment in Education. 1998b. Vol. 5 (1). Pp. 7–74.

Blackwell L., Trzesniewski K., Dweck C. S. Implicit theories of intelligence predict achievement across an adolescent transition: A longitudinal study and an intervention // Child Development. 2007. Vol. 78 (1). Pp. 246–263.

Boaler J. When even the winners are losers: Evaluating the experiences of "top set" students // Journal of Curriculum Studies. 1997. Vol. 29 (2). Pp. 165–182.

Boaler J. Open and closed mathematics: Student experiences and

understandings // Journal for Research in Mathematics Education. 1998. Vol. 29 (1). Pp. 41–62.

Boaler J. Experiencing school mathematics: Traditional and reform approaches to teaching and their impact on student learning (revised, expanded edition). Mahwah, NJ: Erlbaum, 2002a.

Boaler J. Paying the price for “sugar and spice”: Shifting the analytical lens in equity research // Mathematical Thinking and Learning. 2002b. Vol. 4 (2&3). Pp. 127–144.

Boaler J. The “psychological prisons” from which they never escaped: The role of ability grouping in reproducing social class inequalities. FORUM, 2005.

Boaler J. Promoting “relational equity” and high mathematics achievement through an innovative mixed ability approach // British Educational Research Journal. 2008. Vol. 34 (2). Pp. 167–194.

Boaler J. Ability and mathematics: The mindset revolution that is reshaping education // FORUM. 2013a. Vol. 55 (1). Pp. 143–152.

Boaler J. Ability grouping in mathematics classrooms // S. Lerman, ed. International encyclopedia of mathematics education. New York: Springer, 2013b.

Boaler J. The stereotypes that distort how Americans teach and learn math // Atlantic, 2013c, November 12.

Boaler J. Ability grouping in mathematics classrooms // S. Lerman, ed. Encyclopedia of mathematics education. Dordrecht: Springer Science + Business Media, 2014. Pp. 1–5 // doi: 10.1007/978-94-007-4978-8.

Boaler J. Changing the conversation about girls and STEM. Washington, DC: The White House, 2014a, April 28 // http://www.youcubed.org/wp-content/uploads/Youcubed-STEM-white-house.pdf.

Boaler J. The mathematics of hope — Moving from performance to learning in mathematics classrooms. 2014b // https://www.youcubed.org/the-mathematics-of-hope-moving-from-performance-to-learning-in-mathematics-classrooms.

Boaler J. Fluency without fear: Research evidence on the best ways to learn math facts. YouCubed at Stanford University, 2014c // http://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2015/03/FluencyWithoutFear-2015.pdf.

Boaler J. What’s math got to do with it? How teachers and parents can transform mathematics learning and inspire success. New York: Penguin, 2015a.

Boaler J. Memorizers are the lowest achievers and other Common Core math surprises // The Hechinger Report. 2015b, May 7 // http://hechingerreport.org/memorizers-are-the-lowest-achievers-and-other-common-core-math-surprises.

Boaler J., Greeno J. Identity, agency and knowing in mathematics worlds // J. Boaler, ed. Multiple perspectives on mathematics teaching and learning. Westport, CT: Ablex Publishing, 2000. Pp. 171–200.

Boaler J., Humphreys C. Connecting mathematical ideas: Middle school video cases to support teaching and learning. Portsmouth, NH: Heinemann, 2005.

Boaler J., Meyer D., Selling S. K., Sun K. The Simpsons sun blocker: Similarity and congruence through modeling, exploration, and reasoning. YouCubed at Stanford University. No date // http://www.youcubed.org/wp-content/uploads/The-Sunblocker1.pdf.

Boaler J., Sengupta-Irving T. The many colors of algebra: Engaging disaffected students through collaboration and agency // Journal of Mathematical Behavior, 2015.

Boaler J., Staples M. Transforming students' lives through an equitable mathematics approach: The case of Railside School // Teachers College Record. 2005. Vol. 110 (3). Pp. 608–645.

Boaler J., Wiliam D. "We've still got to learn!" Students' perspectives on ability grouping and mathematics achievement // P. Gates, ed. Issues in mathematics teaching. London: Routledge-Falmer, 2001.

Boaler J., Wiliam D., Brown M. Students' experiences of ability grouping — disaffection, polarisation and the construction of failure // British Educational Research Journal. 2001. Vol. 26 (5). Pp. 631–648.

Bransford J., Brown A., Cocking R. How people learn: Brain, mind, experience and school. Washington, DC: National Academy Press, 1999.

Brousseau G. The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics // H. G. Steiner, ed. Theory of mathematics education. Bielefeld Germany: Institut für Didactik der Mathematik der Universität Bielefeld, 1984. Pp. 110–119.

Bryant A. In head-hunting, big data may not be such a big deal // New York Times. 2013. June 19 // http://www.nytimes.com/2013/06/20/business/in-head-hunting-big-data-may-not-be-such-a-big-deal.html.

Burris C., Heubert J., Levin H. Accelerating mathematics achievement using heterogeneous grouping // American Educational Research Journal. 2006. Vol. 43 (1). Pp. 103–134.

Burton L. The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? // Educational Studies in Mathematics. 1999. Vol. 37. Pp. 121–143.

Butler R. Task-involving and ego-involving properties of

evaluation: Effects of different feedback conditions on motivational perceptions, interest and performance // Journal of Educational Psychology. 1987. Vol. 79. Pp. 474–482.

Butler R. Enhancing and undermining intrinsic motivation: The effects of task-involving and ego-involving evaluation on interest and performance // British Journal of Educational Psychology. 1988. Vol. 58. Pp. 1–14.

Challenge Success. Changing the conversation about homework from quantity and achievement to quality and engagement. Stanford, CA: Challenge Success, 2012 // http://www.challengesuccess.org/portals/0/docs/ChallengeSuccess-Homework-WhitePaper.pdf.

Cohen E. Designing groupwork. New York: Teachers College Press, 1994.

Cohen E., Lotan R. Designing groupwork: Strategies for the heterogeneous classroom. 3rd ed. New York: Teachers College Press, 2014.

Cohen G. L., Garcia J. Educational theory, practice, and policy and the wisdom of social psychology // Policy Insights from the Behavioral and Brain Sciences. 2014. Vol. 1 (1). Pp. 13–20.

Common Core State Standards Initiative. Standards for mathematical practice. Common Core State Standards Initiative, 2015 // http://www.corestandards.org/Math/Practice.

Conner J., Pope D., Galloway M. K. Success with less stress // Educational Leadership. 2009. Vol. 67 (4). Pp. 54–58.

Darling-Hammond L. Teacher quality and student achievement // Education Policy Analysis Archives. 2000. Vol. 8. P. 1.

Deevers M. Linking classroom assessment practices with student motivation in mathematics. American Educational Research Association, San Francisco, 2006.

Delazer M., Ischebeck A., Domahs F. et al. Learning by strategies and learning by drill — evidence from an fMRI study // NeuroImage. 2005. Pp. 839–849.

Devlin K. Mathematics: The science of patterns: The search for order in life, mind and the universe. Scientific American Library: New York, 1997.

Devlin K. The math gene: How mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip. New York: Basic Books, 2001.

Devlin K. The math instinct: Why you're a mathematical genius (along with lobsters, birds, cats, and dogs). New York: Basic Books, 2006.

Dixon A. Editorial // FORUM. 2002. Vol. 44 (1). P. 1.

Duckworth A., Quinn P. Development and validation of the short grit scale // Journal of Personality Assessment. 2009. Vol. 91 (2). Pp. 166–174.

Duckworth E. Twenty-four, forty-two and I love you: Keeping it complex // Harvard Educational Review. 1991. Vol. 61 (1). Pp. 1–24.

Dweck C. S. Is math a gift? Beliefs that put females at risk // W. W. S. J. Ceci, ed. Why aren't more women in science? Top researchers debate the evidence. Washington, DC: American Psychological Association, 2006a.

Eccles J., Jacobs J. Social forces shape math attitudes and performance // Signs. 1986. Vol. 11 (2). Pp. 367–380.

Elawar M. C., Corno L. A factorial experiment in teachers' written feedback on student homework: Changing teacher behavior a little rather than a lot // Journal of Educational Psychology. 1985. Vol. 77 (2). Pp. 162–173.

Elmore R., Fuhrman S. Opportunity-to-learn standards and the state role in education // Teachers College Record. 1995. Vol. 96 (3). Pp. 432–457.

Engle R. A., Langer-Osuna J., McKinney de Royston M. Towards a model of influence in persuasive discussions: Negotiating quality, authority, and access within a student-led argument // Journal of the Learning Sciences. 2014. Vol. 23 (2). Pp. 245–268.

Esmonde I., Langer-Osuna J. Power in numbers: Student participation in mathematical discussions in heterogeneous spaces // Journal for Research in Mathematics Education. 2013. Vol. 44 (1). Pp. 288–315.

Feikes D., Schwingendorf K. The importance of compression in children's learning of mathematics and teacher's learning to teach mathematics // Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education. 2008. Vol. 7 (2).

Flannery S. In code: A mathematical journey. New York: Workman Publishing Company, 2002.

Fong A. B., Jaquet K., Finkelstein N. Who repeats Algebra I, and how does initial performance relate to improvement when the course is repeated? (REL 2015–059). Washington, DC: U.S. Department of Education, Institute of Education Sciences, National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Regional Educational Laboratory West, 2014 // http://ies.ed.gov/ncee/edlabs.

Frazier L. To raise student achievement, North Clackamas schools add lessons in perseverance. Oregonian/OregonLive, 2015, February 25 // http://www.oregonlive.com/education/index.ssf/2015/02/to_raise_student_achievement_n.html.

Galloway M. K., Pope D. Hazardous homework? The relationship between homework, goal orientation, and well-being in adolescence // Encounter: Education for Meaning and Social Justice. 2007. Vol. 20 (4). Pp. 25–31.

Girl Scouts of the USA with the National Center for Women &

Information Technology (NCWIT). Evaluating promising practices in informal science, technology, engineering and mathematics (STEM) education for girls, 2008 // http://www.ncwit.org/sites/default/files/legacy/pdf/NCWIT-GSUSAPhaseIIIReport_FINAL.pdf.

Good C., Rattan A., Dweck C. S. Why do women opt out? Sense of belonging and women's representation in mathematics // Journal of Personality and Social Psychology. 2012. Vol. 102 (4). Pp. 700–717.

Gray E., Tall D. Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic // Journal for Research in Mathematics Education. 1994. Vol. 25 (2). Pp. 116–140.

Gunderson E. A., Gripshover S. J., Romero C. et al. Parent praise to 1–3 year-olds predicts children's motivational frameworks 5 years later // Child Development. 2013. Vol. 84 (5). Pp. 1526–1541.

Gutstein E., Lipman P., Hernandez P., de los Reyes R. Culturally relevant mathematics teaching in a Mexican American context // Journal for Research in Mathematic Education. 1997. Vol. 28 (6). Pp. 709–737.

Haack D. Disequilibrium (I): Real learning is disruptive. A Glass Darkly (blog). 2011, January 31 // http://blog4critique.blogspot.com/2011/01/disequilibrium-i-real-learning-is.html.

Hersh R. What is mathematics, really? Oxford, UK: Oxford University Press, 1999.

Horn I. S. Learning on the job: A situated account of teacher learning in high school mathematics departments // Cognition and Instruction. 2005. Vol. 23 (2). Pp. 207–236.

Humphreys C., Parker R. Making number talks matter: Developing mathematical practices and deepening understanding, grades 4–10. Portland, ME: Stenhouse Publishers, 2015.

Jacob W. [Math Acceleration]. Personal communication. 2015.

Jones M. G., Howe A., Rua M. J. Gender differences in students' experiences, interests, and attitudes toward science and scientists // Science Education. 2000. Vol. 84. Pp. 180–192.

Karni A., Meyer G., Rey-Hipolito C. et al. The acquisition of skilled motor performance: Fast and slow experience-driven changes in primary motor cortex // PNAS. 1998. Vol. 95 (3). Pp. 861–868.

Khan S. The one world schoolhouse: Education reimagined. New York: Twelve, 2012.

Kitsantas A., Cheema J., Ware W. H. Mathematics achievement: The role of homework and self-efficacy beliefs // Journal of Advanced Academics. 2011. Vol. 22 (2). Pp. 310–339.

Klarreich E. Meet the first woman to win math's most prestigious prize // Quanta Magazine. 2014, August 13 // http://www.wired.com/2014/08/maryam-mirzakhani-fields-medal.

Kohn A. Punished by rewards: The trouble with gold stars, incentive plans, A's, praise, and other bribes. New York: Mariner Books, 1999.

Kohn A. The schools our children deserve: Moving beyond traditional classrooms and tougher standards. New York: Mariner Books, 2000.

Kohn A. Teachers who have stopped assigning homework (blog). 2008, September // http://www.alfiekohn.org/blogs/teachers-stopped-assigning-homework.

Kohn A. The case against grades. 2011, November // http://www.alfiekohn.org/article/case-grades.

Koonlaba A. E. 3 visual artists — and tricks — for integrating the arts into core subjects // Education Week Teacher. 2015, February 24 // http://www.edweek.org/tm/articles/2015/02/24/3-visual-artists-and-tricks-for-integrating-the-arts.html.

Langer-Osuna J. How Brianna became bossy and Kofi came out smart: Understanding the differentially mediated identity and engagement of two group leaders in a project-based mathematics classroom // Canadian Journal for Science, Mathematics, and Technology Education. 2011. Vol. 11 (3). Pp. 207–225.

Lawyers' Committee for Civil Rights of the San Francisco Bay Area. Held back: Addressing misplacement of 9th grade students in Bay Area school math classes. 2013, January // www.lccr.com.

Lee D. N. Black girls serving as their own role models in STEM // Scientific American. 2014, November 25 // http://blogs.scientificamerican.com/urban-scientist/2014/11/25/black-girls-serving-as-their-own-role-models-in-stem.

Lee J. Racial and ethnic achievement gap trends: Reversing the progress toward equity? // Educational Researcher. 2002. Vol. 31 (1). Pp. 3–12.

Lemos M. S., Veríssimo L. The relationships between intrinsic motivation, extrinsic motivation, and achievement, along elementary school // Procedia — Social and Behavioral Sciences. 2014. Vol. 112. Pp. 930–938.

Leslie S.-J., Cimpian A., Meyer M., Freeland E. Expectations of brilliance underlie gender distributions across academic disciplines // Science. 2015. Vol. 347 (6219). Pp. 262–265.

Lupton T., Pratt S., Richardson K. Exploring long division through division quilts // Centroid. 2014. Vol. 40 (1). Pp. 3–8.

Maguire E., Woollett K., Spiers H. London taxi drivers and bus drivers: A structural MRI and neuropsychological analysis // Hippocampus. 2006. Vol. 16 (12). Pp. 1091–1101.

Mangels J. A., Butterfield B., Lamb J. et al. Why do beliefs about intelligence influence learning success? A social cognitive

neuroscience model // Social Cognitive and Affective Neuroscience. 2006. Vol. 1 (2). Pp. 75–86.

Mathematics Teaching and Learning to Teach, University of Michigan. SeanNumbers-Ofala video [Online]. 2010 // http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/65013.

McDermott R. P. The acquisition of a child by a learning disability // S. Chaiklin, J. Lave, eds. Understanding practice: Perspectives on activity and context. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1993. Pp. 269–305.

McKnight C., Crosswhite F. J., Dossey J. A. et al. The underachieving curriculum — Assessing US school mathematics from an international perspective. Champaign, IL: Stipes Publishing, 1987.

Mikki J. Students' homework and TIMSS 2003 mathematics results. International Conference, Teaching Mathematics Retrospective and Perspective, 2006.

Moser J., Schroder H. S., Heeter C. et al. Mind your errors: Evidence for a neural mechanism linking growth mindset to adaptive post error adjustments // Psychological Science. 2011. Vol. 22. Pp. 1484–1489.

Moses R., Cobb J. C. Radical equations: Math, literacy and civil rights. Boston: Beacon Press, 2001.

Mueller C. M., Dweck C. S. Praise for intelligence can undermine children's motivation and performance // Journal of Personality and Social Psychology. 1998. Vol. 75 (1). Pp. 33–52.

Murphy M. C., Garcia J. A., Zirkel S. The role of faculty mindsets in women's performance and participation in STEM (in prep).

Nasir N. S., Cabana C., Shreve B. et al., eds. Mathematics for equity: A framework for successful practice. New York: Teachers College Press, 2014.

Noguchi S. Palo Alto math teachers oppose requiring Algebra II to graduate. San Jose Mercury News, 2012, January 14 // http://www.mercurynews.com/ci_19748978.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). Lessons from PISA 2012 for the United States, strong performers and successful reformers in education. Paris: OECD, 2013.

Organisation for Economic Co-operation and Development (OECD). The ABC of gender equality in education: Aptitude, behaviour, confidence. A Program for International Student Assessment (PISA) Report. Paris: OECD Publishing, 2015.

Paek P., Foster D. Improved mathematical teaching practices and student learning using complex performance assessment tasks. National Council on Measurement in Education (NCME), Vancouver, BC, Canada, 2012.

Park J., Brannon E. Training the approximate number system

improves math proficiency. Association for Psychological Science, 1–7. 2013.

Parrish S. Number talks: Helping children build mental math and computation strategies, grades K–5, updated with Common Core Connections. Sausalito, CA: Math Solutions, 2014.

Piaget J. The child's construction of reality. London: Routledge & Kegan Paul, 1958.

Piaget J. Piaget's theory // P. H. Mussen, ed. Carmichael's manual of child psychology. New York: Wiley, 1970.

Picciotto H. Lab gear activities for Algebra I. Mountain View, CA: Creative Publications, 1995.

Program for International Student Assessment (PISA). PISA 2012 results in focus. What 15-year-olds know and what they can do with what they know. Paris, France: OECD, 2012.

Program for International Student Assessment (PISA). Does homework perpetuate inequities in education? PISA in Focus 46, 2015 // http://www.oecd-ilibrary.org/education/does-homework-perpetuate-inequities-in-education_5jxrhqhtx2xt-en;jsessionid=f7tsdsj7up8t.x-oecd-live-02.

Pulfrey C., Buchs C., Butera F. Why grades engender performance-avoidance goals: The mediating role of autonomous motivation // Journal of Educational Psychology. 2011. Vol. 103 (3). Pp. 683–700 // http://www.researchgate.net/profile/Fabrizio_Butera/publication/232450947_Why_grades_engender_performance-avoidance_goals_The_mediating_role_of_autonomous_motivation/links/02bfe50ed4ebfd0670000000.pdf.

Reeves D. B. The learning leader: How to focus school improvement for better results. Alexandria, VA: Association for Supervision & Curriculum Development, 2006.

Romero C. Coping with challenges during middle school: The role of implicit theories of emotion (Doctoral dissertation). Stanford, CA: Stanford University, 2013 // http://purl.stanford.edu/ft278nx7911.

Rose H., Betts J. R. The effect of high school courses on earnings // Review of Economics and Statistics. 2004. Vol. 86 (2). Pp. 497–513.

Schmidt W. H., McKnight C. C., Cogan L. S. et al. Facing the consequences: Using TIMSS for a closer look at US mathematics and science education. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 2002.

Schmidt W. H., McKnight C. C., Raizen S. A. A splintered vision: An investigation of US science and mathematics education. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1997.

Schwartz D., Bransford J. A time for telling // Cognition and Instruction. 1998. Vol. 16 (4). Pp. 475–522.

Schwartz L. A mathematician grappling with his century. Basel, Switzerland: Birkhäuser, 2001.

Seeley C. Faster isn't smarter: Messages about math, teaching, and learning in the 21st century. Sausalito, CA: Math Solutions, 2009.

Seeley C. Smarter than we think: More messages about math, teaching, and learning in the 21st century. Sausalito, CA: Math Solutions, 2014.

Selling S. K. Learning to represent, representing to learn // Journal of Mathematical Behavior. 2015.

Silva E., White T. Pathways to improvement: Using psychological strategies to help college students' master developmental math. Stanford, CA: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching, 2013.

Silver E. A. On mathematical problem posing // For the Learning of Mathematics. 1994. Vol. 14 (1). Pp. 19–28.

Sims P. Daring to stumble on the road to discovery // New York Times. 2011, August 6 // http://www.nytimes.com/2011/08/07/jobs/07pre.html?_r=0.

Solomon Y. Not belonging? What makes a functional learner identity in undergraduate mathematics? // Studies in Higher Education. 2007. Vol. 32 (1). Pp. 79–96.

Stanford Center for Professional Development. How to learn math: For teachers and parents // http://scpd.stanford.edu/instanford/how-to-learn-math.jsp.

Stanford Online Lagunita. How to learn math: For students. Stanford University, 2014 // https://lagunita.stanford.edu/courses/Education/EDUC115-S/Spring2014/about.

Steele C. Whistling Vivaldi: How stereotypes affect us and what we can do. New York: Norton, 2011.

Stigler J., Hiebert J. The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom. New York: Free Press, 1999.

Stipek D. J. Motivation to learn: Integrating theory and practice. New York: Pearson, 1993.

Supekar K., Swigart A. G., Tenison C. et al. Neural predictors of individual differences in response to math tutoring in primary-grade school children // Proceedings of the National Academy of Sciences. 2013. Vol. 110 (20). Pp. 8230–8235.

Thompson G. Teaching the brain to learn // THE Journal, 2014, June 2 // http://thejournal.com/articles/2014/06/02/teaching-the-brain-to-learn.aspx.

Thurston W. Mathematical education // Notices of the American Mathematical Society. 1990. Vol. 37 (7). Pp. 844–850.

Tobias S. Overcoming math anxiety. New York: Norton, 1978.

Treisman U. Studying students studying calculus: A look at the lives of minority mathematics students in college // College Mathematics Journal. 1992. Vol. 23 (5). Pp. 362–372.

Vélez W. Y., Maxwell J. W., Rose C. Report on the 2012–2013 new doctoral recipients // Notices of the American Mathematical Society. 2013. Vol. 61 (8). Pp. 874–884.

Wang J. Opportunity to learn: The impacts and policy implications // Educational Evaluation and Policy Analysis. 1998. Vol. 20 (3). Pp. 137–156 // doi:10.3102/01623737020003137.

Wenger E. Communities of practice: Learning, meaning and identity. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.

White B. Y., Frederiksen J. R. Inquiry, modeling, and metacognition: Making science accessible to all students // Cognition and Instruction. 1998. Vol. 16 (1). Pp. 3–118.

Wolfram C. Teaching kids real math with computers. TED Talks, 2010, July // http://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers?language=en.

Woollett K., Maguire E.A. Acquiring "The Knowledge" of London's layout drives structural brain changes // Current Biology. 2011. Vol. 21 (24). Pp. 2109–2114.

YouCubed at Stanford University. Making groupwork equal. Stanford Graduate School of Education, 2015a // http://www.youcubed.org/category/making-group-work-equal.

YouCubed at Stanford University. Moving colors. Stanford Graduate School of Education, 2015b // http://www.youcubed.org/task/moving-colors.

YouCubed at Stanford University. Tour of mathematical connections. Stanford Graduate School of Education, 2015c // http://www.youcubed.org/tour-of-mathematical-connections.

YouCubed at Stanford University. Video: High-quality teaching examples. Stanford Graduate School of Education, 2015d // www.youcubed.org/high-quality-teaching-examples/.

Zaleski A. Western High School's RoboDoves crushes the competition, stereotypes. Baltimore Sun, 2014, November 12 // http://www.baltimoresun.com/entertainment/bthesite/bs-b-1113-cover-robodoves-20141111-story.html#page=1.

Zohar A., Sela D. Her physics, his physics: Gender issues in Israeli advanced placement physics classes // International Journal of Science Education. 2003. Vol. 25 (2). P. 261.

Приложение

Вопросы для размышлений: домашнее задание по математике
Задача с фигурами
Задача с палочками Кюизенера
Треугольник Паскаля
Задача на отрицательное пространство
Найдите четырехугольники!
Четыре четверки
Информационный бюллетень
Прыжки в длину
Параллельные прямые и секущая
Лестница
Складывание бумаги
Конус и цилиндр
Моя домашняя работа, мои размышления
Сортировка чисел
Растущие прямоугольники
Задача на линейную функцию
Задача на математическую функцию
Шнурки
Распределение ролей в группе — США
Распределение ролей в группе — Великобритания
Самооценка: многоугольники
Алгебра 1. Самооценка
Две звезды и пожелание
Размышления
Мозаичная задача А по алгебре
Мозаичная задача Б по алгебре
Мозаичная задача В по алгебре
Мозаичная задача Г по алгебре
Билет на выход
Самооценка «Покажите, что вы можете сделать»
Математические цели оценки участия в работе группы
Групповые цели оценки участия в работе группы
Собачьи галеты
Акцент на математических связях
Цветовое кодирование шоколадного пирога
Раскрашенный куб
Привязанный козлик
Моделирование распределения мирового богатства
Футбольный вратарь
Мы хотели бы знать

Вопросы для размышлений: домашнее задание по математике

Часть 1: вопросы, требующие письменного ответа

** Ответ на вопрос(ы) должен быть очень подробным! Пожалуйста, используйте полные предложения и будьте готовы сформулировать свой ответ на уроке на следующий день.*

1. Какие основные математические концепции или идеи вы изучили сегодня или что вы обсуждали на уроке сегодня? ___
2. Какие вопросы у вас остались по поводу ___? Если у вас нет вопросов, запишите аналогичную задачу и решите ее.
3. Опишите ошибку или заблуждение, которые возникли у вас или у кого-то из одноклассников сегодня на уроке. Что вы узнали благодаря этому?

_____

4. Какой подход вы или ваша группа использовали для решения задачи или нескольких задач? Был ли ваш подход эффективным? Какой урок вы извлекли из этого подхода?
5. Подробно опишите алгоритм решения этой задачи, который использовал на уроке кто-то другой. Чем он был похож на ваш и чем отличался от него?

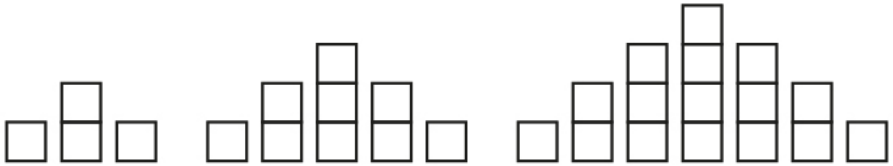
_____

6. Какие новые слова или термины были представлены сегодня? Что, по вашему мнению, означает каждое новое слово? Приведите пример каждого слова (или нарисуйте то, что оно означает). ___
7. Вокруг чего развернулась самая серьезная математическая дискуссия на уроке сегодня? Что вы узнали из нее? ___
8. В чем сходство или различие между ___ и ___?
9. Что произошло бы, если бы вы изменили ___?
10. В чем были ваши сильные и слабые места в работе над этой темой? Как вы планируете исправить слабые места? ___

Материал предоставлен Екатериной Мильвидской и Тианой Тебельман на условиях лицензии Creative Commons Attribution 3.0.

Задача с фигурами

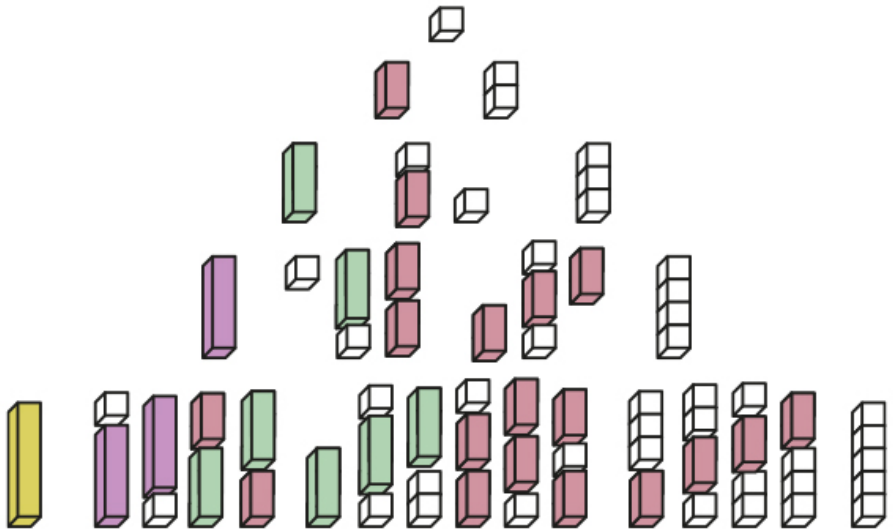
Как вы представляете себе рост фигур?



Источник: предоставлено Рут Паркер; задача используется в рамках курсов MEC (Mathematics Education Collaborative).

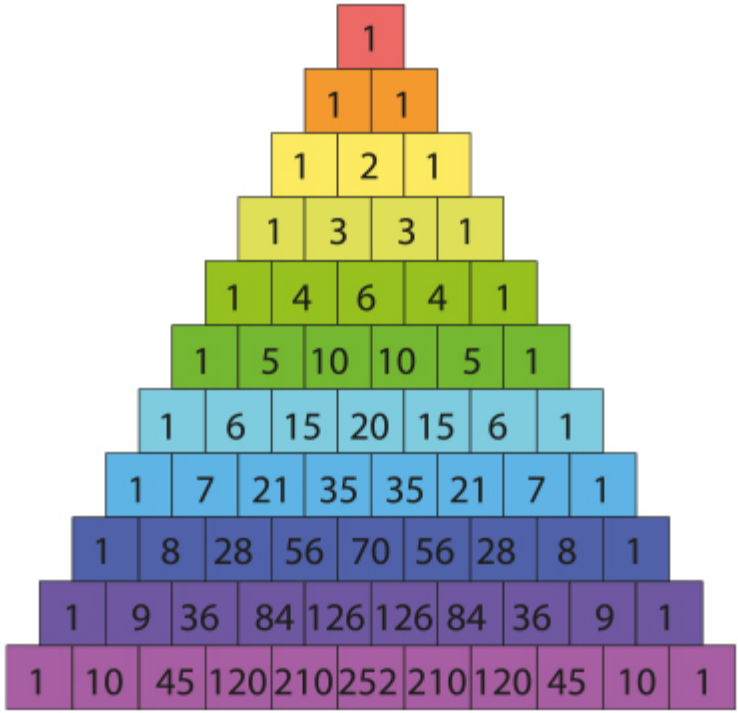
Последовательности палочек Кюизенера

Определите, сколько разных последовательностей можно составить для палочек любой длины. Например, для светло-зеленой палочки можно составить 4 последовательности:



Источник: предоставлено Рут Паркер; задача используется в рамках курсов MEC (Mathematics Education Collaborative).

Треугольник Паскаля



Задача на отрицательное пространство

1. Как выглядел бы рисунок 100?
2. Представьте себе, что вы могли бы продолжить построение этой модели в обратном направлении. Сколько ячеек было бы на рисунке –1? (Да, рисунок –1, что бы это ни значило!)
3. Как выглядел бы рисунок –1?

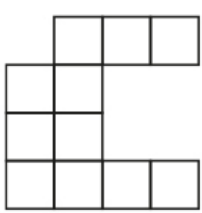


Рисунок 2

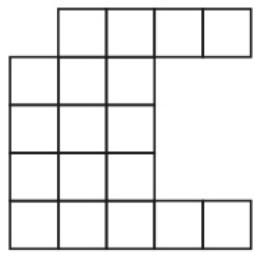


Рисунок 3

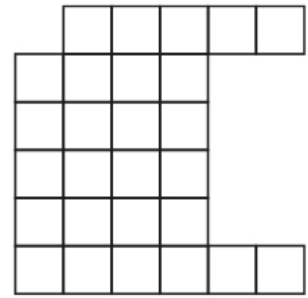


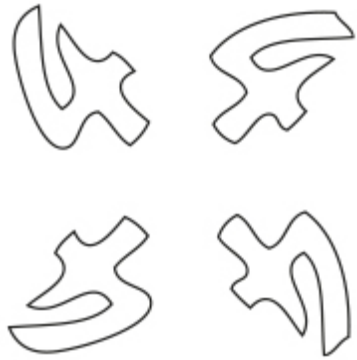
Рисунок 4

Источник: на основе материалов, предоставленных Карлосом Кабана.

Найдите четырехугольники!

Четыре четверки

Можете ли вы найти все числа от 1 до 20, используя только числа 4 и любые математические операции?



Дополнительные вопросы

Можете ли вы найти несколько способов составления каждого числа из четырех четверок?

Можете ли вы составить таким образом число больше 20?

Можете ли вы найти отрицательные целые числа с помощью четырех четверок?

Информационный бюллетень

Вы пишете информационный бюллетень, чтобы рассказать, что вы узнали об этой математической теме, членам семьи и друзьям. Вы можете показать свое понимание соответствующих идей и написать, почему математические концепции, которые вы изучили, так важны. Опишите также пару видов деятельности, которыми занимались и которые показались вам интересными.

Составляя информационный бюллетень, вы можете воспользоваться следующими ресурсами.

- Фотографии выполнения различных заданий.
- Рисунки.
- Анимация.
- Интервью или опросы.

Представленное ниже описание некоторых видов деятельности поможет вам вспомнить, как вы работали над данной задачей.

Пожалуйста, подготовьте четыре следующих раздела. Вы можете изменить названия разделов так, чтобы они соответствовали вашей работе.

Новости	Новые открытия
Объясните суть этой математической концепции, а также минимум двумя способами опишите, что она означает	Выберите минимум два разных вида деятельности, которые помогли вам понять соответствующие концепции. Для каждого вида деятельности сделайте следующее. • Объясните, почему вы выбрали его. • Объясните, что вы узнали благодаря ему. • Объясните, какие трудности были сопряжены с ним
Связи	**Будущее**
Выберите один дополнительный вид деятельности, который помог вам усвоить математическую концепцию, или процесс, который вы можете связать с изучением другой темы. Объясните, почему вы выбрали этот вид деятельности. Объясните, какую важную математическую концепцию вы изучили в процессе этой деятельности. Объясните, с чем вы связали эту концепцию и как вы представляете себе эту связь. Объясните важность этой связи и возможности ее использования в будущем	Напишите краткий обзор информационного бюллетеня. Рассмотрите следующие вопросы: Для чего можно использовать эту важную математическую концепцию? Какие вопросы о ней у вас остались?

Прыжки в длину

Вы хотите пройти отбор в команду по прыжкам в длину; для этого ваш средний результат должен составлять 5,2 м. Тренер говорит вам, что будет засчитывать лучший прыжок, который вы сделаете в каждый день недели, а затем вычислит среднее значение. Вот ваши пять прыжков.

День	Метры
Понедельник	5,2
Вторник	5,2
Среда	5,3
Четверг	5,4
Пятница	4,4

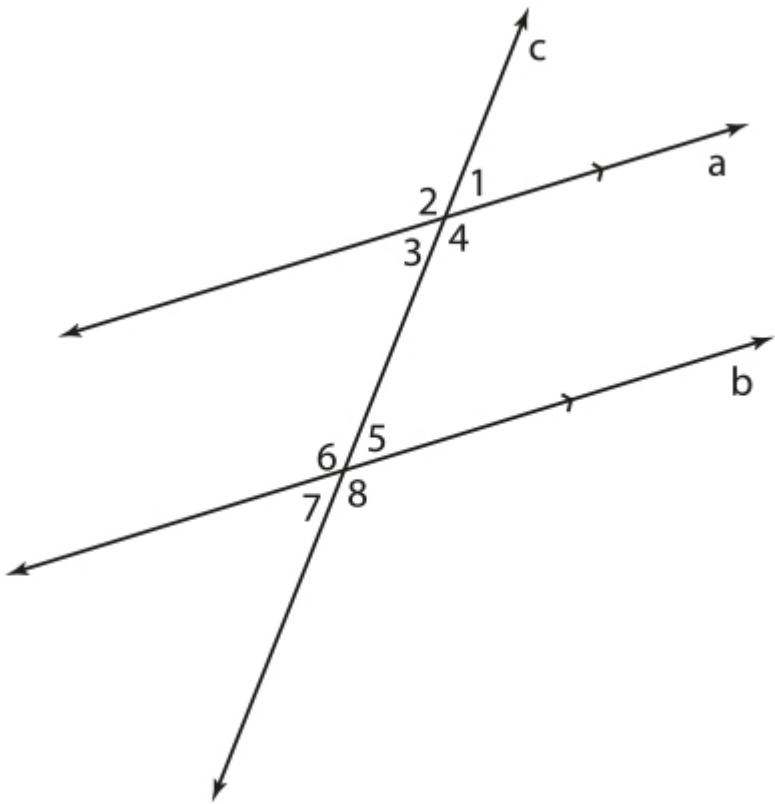
К сожалению, в пятницу был низкий показатель, потому что вы не очень хорошо себя чувствовали.

Как вычислить среднее значение, которое справедливо отобразит ваши результаты? Вычислите несколько средних

значений разными способами и определите, какое из них, на ваш взгляд, самое справедливое. Объясните свой метод и попытайтесь убедить кого-нибудь в том, что он лучший.

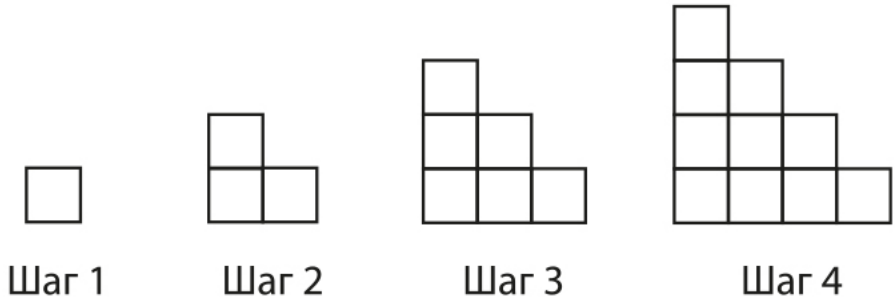
Параллельные прямые и секущая

1. Выделите конгруэнтные углы с помощью цветового кодирования.
2. Определите вертикальные и смежные углы.
3. Опишите соотношения, которые вы видите. В своих записях используйте те же цвета, что и на рисунке.



Вертикальные углы: ___
Смежные углы: ___
Соотношения: ___

Лестница



Как вы представляете себе рост закономерности?
Сколько ячеек было бы на шаге 100?
Сколько ячеек было бы на шаге n?

Складывание бумаги

Работайте с партнером. По очереди берите на себя роли скептика и убеждающего. Когда вы убеждающий, ваша задача — убеждать! Приводите аргументы в пользу всех своих утверждений. Скептики должны относиться ко всему скептически! Не давайте легко убедить себя. Требуйте аргументов и обоснований, имеющих для вас смысл.

В каждом из представленных ниже заданий один человек должен сделать фигуру, а затем убедить другого в том, что он правильно выполнил задание. Ваш партнер играет роль скептика. Когда вы перейдете к следующему заданию, поменяйтесь ролями.

Начните с квадратного листа бумаги и сделайте на нем сгибы так, чтобы построить новую фигуру. Затем объясните, почему вы считаете, что созданная вами фигура имеет указанную площадь.

1. Постройте квадрат, площадь которого равна $1/4$ площади исходного. Убедите партнера в том, что это квадрат и что его площадь составляет $1/4$ исходной.

2. Постройте треугольник, площадь которого равна $1/4$ площади исходного квадрата. Убедите партнера в том, что площадь этого треугольника составляет $1/4$ исходной.

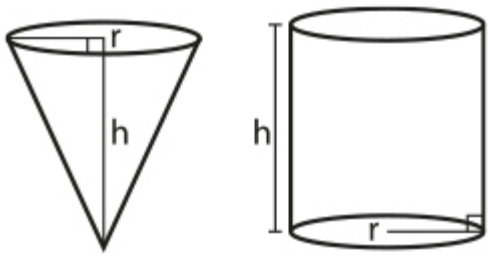
3. Постройте еще один треугольник, площадь которого также равна $1/4$ площади исходного квадрата и который не конгруэнтен треугольнику, построенному в предыдущей задаче. Убедите партнера в том, что площадь этого треугольника составляет $1/4$ исходной.

4. Постройте квадрат, площадь которого равна $1/2$ площади исходного. Убедите партнера в том, что это квадрат и что его площадь составляет $1/2$ исходной.

5. Постройте еще один квадрат, площадь которого также равна $^1/_2$ площади исходного, но который ориентирован иначе, чем квадрат, построенный в задаче 4. Убедите партнера в том, что площадь этого квадрата составляет $^1/_2$ исходной.

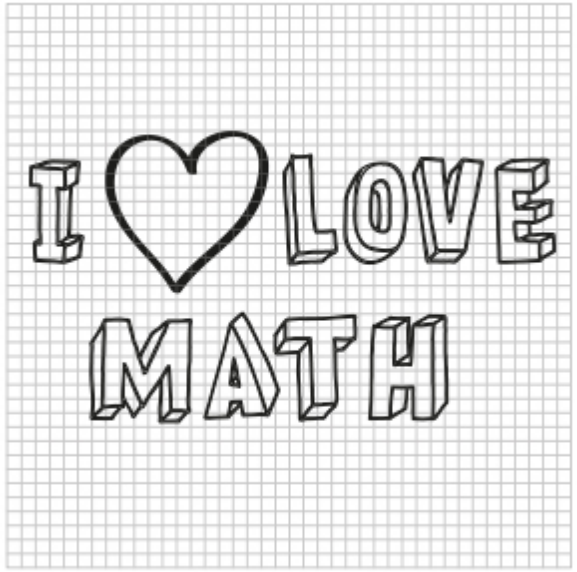
Источник: Driscoll, 2007, p. 90, http://heinemann.com/products/E01148.aspx.

Конус и цилиндр



Конус и цилиндр имеют одинаковые высоту и радиус. Чему равно соотношение объемов конуса и цилиндра? Сделайте предположение и попытайтесь убедить других учеников в его истинности. Чтобы быть убедительными, используйте рисунки, модели и цветовое кодирование.

Моя домашняя работа. Мои размышления



Какую основную идею вы узнали сегодня?

_____

С чем у вас возникли трудности или по поводу чего у вас есть вопросы?

_____

Как идеи, которые вы узнали на уроке сегодня, можно применить в жизни?

_____

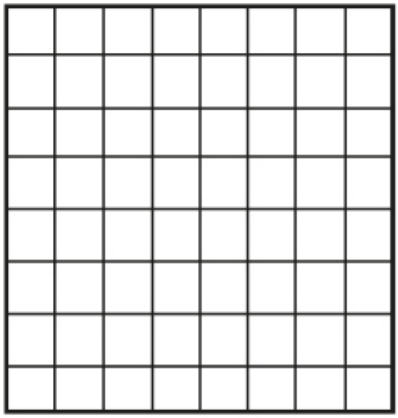
Сортировка чисел

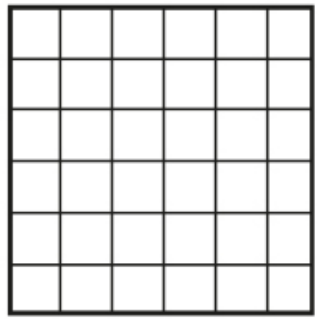
Как насчет того, чтобы решить простую головоломку?

Эта задача предназначена для работы в группах из 4 человек. (Примечания учителей и их идеи по поводу расширения задачи можно найти здесь: http://nrich.maths.org/6947&part=note.)

1. Есть два пазла, которые учитель может распечатать для вас (см. ниже). Сложите каждый пазл, а затем выложите все

фрагменты на расчерченные квадраты, которые также можно распечатать.





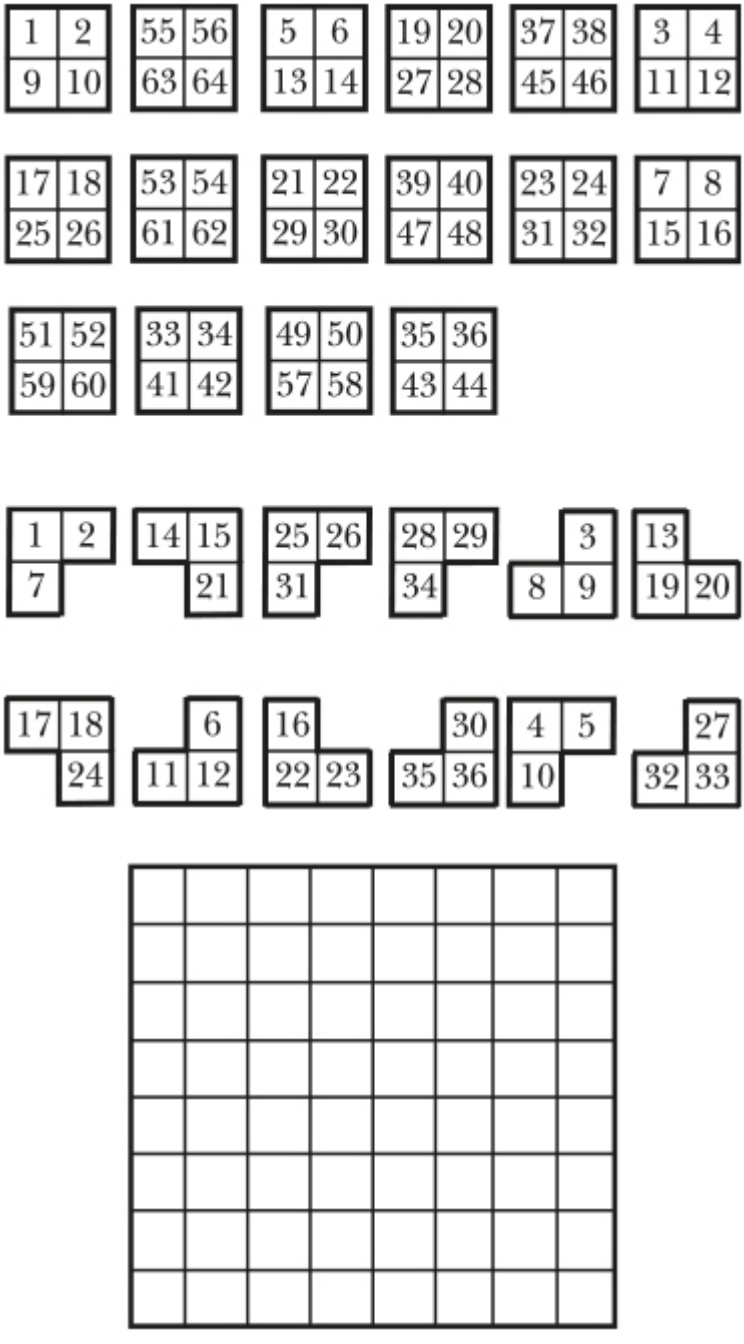
2. Положите меньший квадрат на больший любым удобным для вас способом, чтобы ячейки совпали. (Возможно, вам будет легче сделать это, если вы скопируете числа, расположенные на меньшем квадрате, на кальку.)

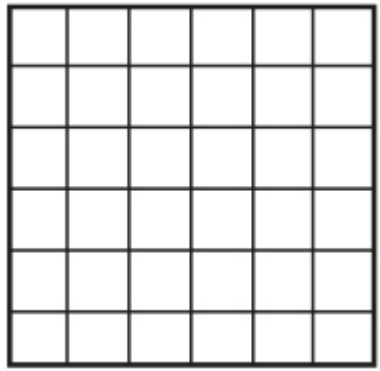
3. Проанализируйте, что произойдет, когда вы сложите числа, расположенные друг над другом.

4. В своей группе проанализируйте все идеи, которые у вас появятся.

Когда вы рассмотрите все 36 комбинаций, вам, вероятно, нужно будет задать вопрос: «Интересно, что произойдет, если мы…» Внесите одно небольшое изменение, проанализируйте этот вариант, а затем сравните два набора результатов.

Возможно, вы захотите задать вопрос: «Почему…»


1 2
9 10
55 56
63 64
5 6
13 14
19 20
27 28
37 38
45 46
3 4
11 12
17 18
25 26
53 54
61 62
21 22
29 30
39 40
47 48
23 24
31 32
7 8
15 16
51 52
59 60
33 34
41 42
49 50
57 58
35 36
43 44
1 2
7
14 15
21
25 26
31
28 29
34
3
8 9
13
19 20
17 18
24
6
11 12
16
22 23
30
35 36
4 5
10
27
32 33



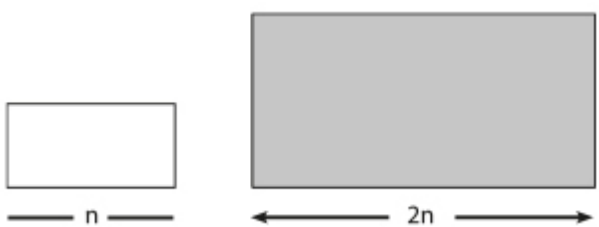
Источник: NRICH (http://nrich.maths.org/6947).

Растущие прямоугольники

Представьте себе прямоугольник площадью 20 см^2.

Какой может быть длина и ширина этого прямоугольника? Перечислите минимум пять разных комбинаций.

Представьте себе, что вы увеличили прямоугольник вдвое.



Назовите размеры увеличенного прямоугольника и найдите его площадь. На что вы обратили внимание?

Попробуйте начать с прямоугольника с другой площадью и увеличить его вдвое. На что вы обратили внимание теперь?

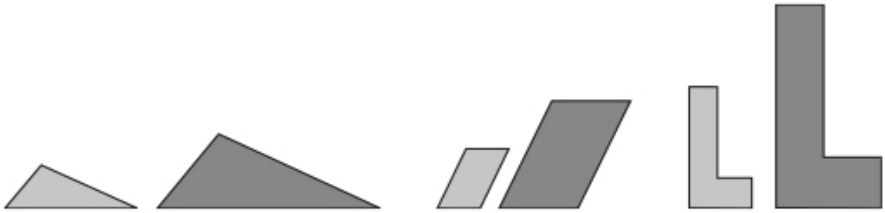
Можете ли вы объяснить, что происходит?

Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в 3, 4 или 5 раз? Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в дробное количество раз?

Что произойдет с площадью прямоугольника, если вы увеличите его в k раз?

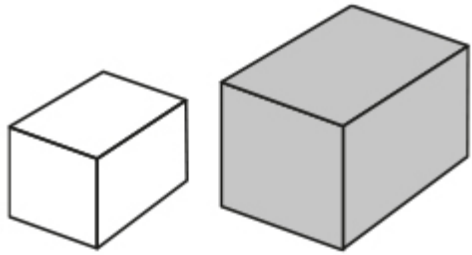
Объясните и обоснуйте выводы, к которым вы пришли.

Применимы ли эти выводы к другим двумерным фигурам?



Теперь проанализируйте, что произойдет с площадью поверхности и объемом различных прямоугольных параллелепипедов, если увеличить их в разное количество раз.

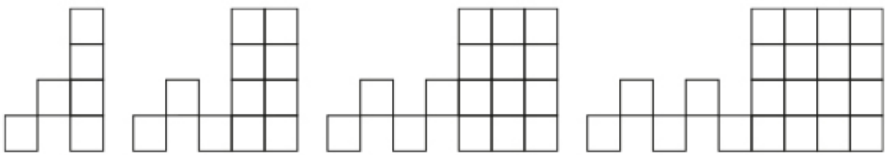
Объясните и обоснуйте выводы, к которым вы пришли.



Применимы ли эти выводы к другим объемным фигурам, кроме прямоугольного параллелепипеда?

Источник: NRICH (http://nrich.maths.org/6923).

Задача на линейную функцию

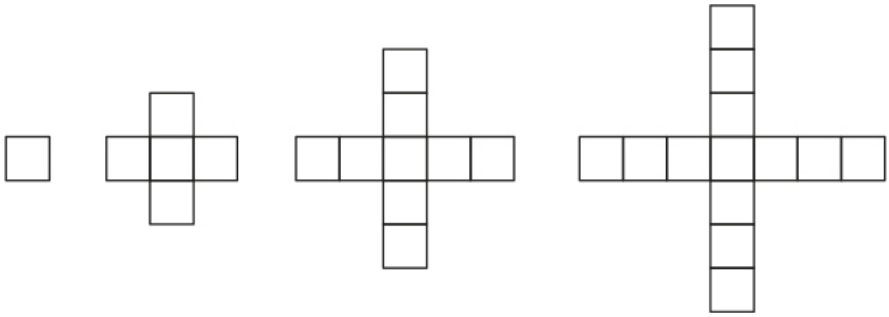


Как растут эти фигуры?

Можете ли вы определить, какой будет фигура на шаге 100?

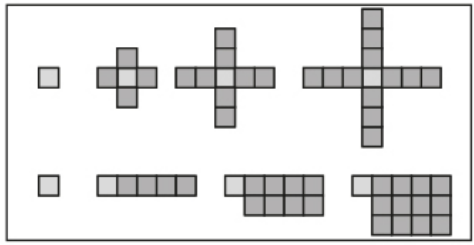
Какой будет фигура на шаге *n*?

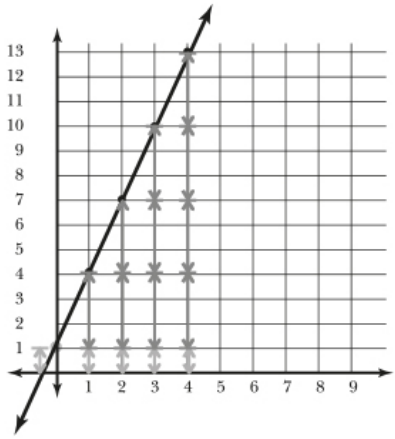
Задача на математическую функцию



$y = 4x + 1$

X	Y
0	$4(0) + 1 = 1$
1	$4(1) + 1 = 5$
2	$4(2) + 1 = 9$
3	$4(3) + 1 = 13$
n	$4n + 1$





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- На этапе 1 *один* квадрат.
- На каждом очередном этапе **к каждой стороне исходного квадрата прибавляется еще один квадрат**.
- Фигура растет влево, вправо, вверх и вниз; на каждом этапе прибавляется **четыре квадрата**.

Шнурки

Шнурки какой длины нужны для ботинок разных размеров?

Проанализируйте соотношение между длиной шнурков и размером ботинок.

Составьте уравнение вида $y = mx + b$. Оно поможет башмачнику определить длину шнурков, которые ему необходимо купить для ботинок разных размеров.

Распределение ролей в группе — США

Фасилитатор

• Позаботьтесь о том, чтобы ваша группа прочла эту карточку, прежде чем приступать к заданию. «Кто хочет прочесть? Все поняли, что нужно делать?»

• Обеспечивайте сплоченность группы. Позаботьтесь о том, чтобы были услышаны идеи каждого. «Кто-то понял это иначе? Мы готовы двигаться дальше?» Убедитесь, что каждый член группы может объяснить свои идеи.

Секретарь (составитель отчета)

• Ваша группа должна структурировать полученные результаты. Необходимо, чтобы они отражали идеи всех членов группы и были упорядоченными, использовались разные цвета, стрелки и другие математические инструменты, передающие суть математических концепций, аргументов и связей. «Как нам проиллюстрировать эту идею?» Будьте готовы принять участие в совещании с учителем.

Ответственный за ресурсы

• Получите материалы, необходимые вашей команде.

• Убедитесь, что все вопросы требуют командной работы.

• Когда ваша команда закончит работу, позовите учителя, чтобы проанализировать вместе с ним результаты выполнения задания.

Капитан команды

• Напоминайте своей команде о необходимости обосновывать каждое математическое утверждение и искать связи между разными утверждениями. «Почему вы в этом так уверены? Как это связано с?..»

• Не допускайте разговоров вне группы!

Распределение ролей в группе — Великобритания

Организатор

• Обеспечивайте сплоченность группы и сфокусированность на решении задачи; позаботьтесь о том, чтобы никто не разговаривал с участниками других групп.

Снабженец

• Вы единственный человек, который может покинуть свое место, чтобы найти для группы линейки, калькуляторы, карандаши и другие инструменты.

• Убедитесь, что все готовы к работе, прежде чем звать учителя.

Обеспечивающий понимание

• Позаботьтесь о том, чтобы члены группы поняли все идеи.

• Если вы не понимаете ту или иную идею, спросите того, кто ее предложил, а если понимаете, убедитесь, что остальные тоже всё понимают.

• Позаботьтесь о том, чтобы все важные фрагменты ваших разъяснений были записаны.

Обеспечивающий вовлеченность

• Позаботьтесь о том, чтобы были выслушаны идеи каждого члена группы; предложите другим членам группы внести свои предложения.

Самооценка: многоугольники

	Я могу сделать это самостоятельно и объяснить свой способ(ы) решения однокласснику или учителю	Я могу сделать это самостоятельно	Мне нужно больше времени. Мне необходимо видеть пример, который поможет мне
Нарисовать прямые и отрезки с заданными параметрами			
Нарисовать параллельные прямые и отрезки			
Нарисовать пересекающиеся прямые и отрезки			
Построить многоугольник с заданным периметром			
Построить квадрат или прямоугольник с заданной площадью			
Построить неправильную фигуру, площадь которой можно найти, разделив фигуру на прямоугольники или квадраты			

Алгебра 1. Самооценка

Раздел 1 — линейные уравнения и неравенства

• Я могу решить линейное уравнение с одной переменной.

• Я могу решить линейное неравенство с одной переменной.

• Я могу найти формулы для указанной переменной.

• Я могу решить уравнение с модулем с одной переменной.

• Я могу решить составное неравенство с одной переменной и представить решение графически.

• Я могу решить неравенство с модулем с одной переменной.

Раздел 2 — интерпретация взаимосвязей в математических выражениях

• Я могу использовать и интерпретировать те или иные компоненты математических формул.

• Я могу преобразовывать компоненты формул.

• Я могу определить, что собой представляет любая часть математического выражения.

• Я могу составить уравнение или неравенство с одной переменной, которое лучше всего описывает задачу.

• Я могу составить уравнение с двумя переменными, которое

лучше всего описывает задачу.

• Я могу найти те значения, которые удовлетворяют уравнению, и обосновать свой выбор.

• Я могу использовать полученное решение в описываемой реальной задаче и обосновать свой выбор.

• Я могу построить график уравнения в системе координат с нужными обозначениями и в нужном масштабе.

• Я могу доказать, что любая точка на графике удовлетворяет уравнению, если в него подставить ее координаты.

• Я могу сравнить свойства двух функций, заданных графически, таблично или аналитически.

Раздел 3 — понимание функций

• Я могу определить, представляет ли функцию график, таблица или набор упорядоченных пар.

• Я могу расшифровать запись функции и объяснить, как аргумент согласуется с ее значением.

• Я могу преобразовать список чисел (последовательность) в функцию, сделав целые числа аргументами, а элементы последовательности — значениями функции.

• Я могу выявить основные свойства графика: отрезки, отсекаемые на координатных осях, возрастание или убывание функции, максимальное и минимальное значения и поведение функции на границах области определения, с помощью графика, таблицы или уравнения.

• Я могу объяснить, как график отображает область значений функции.

Раздел 4 — линейные функции

• Я могу вычислить и интерпретировать среднюю скорость изменения функции.

• Я могу построить график линейной функции и определить отрезки, отсекаемые на координатных осях.

• Я могу построить график линейного уравнения на координатной плоскости.

• Я могу продемонстрировать, что линейная функция имеет постоянную скорость изменения.

• Я могу найти ситуации, которые отображают одинаковую скорость изменения за равные промежутки и могут быть смоделированы с помощью линейных функций.

• Я могу построить линейную функцию на основе арифметической последовательности, графика, таблицы значений или описания соотношения.

• Я могу объяснить (с использованием подходящих единиц)

значение таких понятий, как угол наклона прямой, отрезок, отсекаемый на оси *y*, а также другие точки на прямой, когда она моделирует реальное соотношение.

Раздел 5 — системы линейных уравнений и неравенств

• Я могу решить систему линейных уравнений графически.

• Я могу решить систему линейных уравнений методом подстановки.

• Я могу решить систему линейных уравнений методом исключения неизвестных.

• Я могу решить систему линейных неравенств графически.

• Я могу составить и представить в графическом виде набор ограничений для задачи линейного программирования и найти максимальное и (или) минимальное значение.

Раздел 6 — статистические модели

• Я могу описать центр распределения данных (среднее значение или медиану).

• Я могу описать разброс данных (межквартильный диапазон или среднеквадратичное отклонение).

• Я могу представить данные в виде диаграмм с числовой осью (точечных диаграмм, гистограмм и диаграмм размаха).

• Я могу сравнить распределение двух или более множеств данных, проанализировав их форму, центр и разброс, когда они нанесены на одну и ту же шкалу.

• Я могу интерпретировать особенности формы, центра и разброса множества данных в контексте задачи, а также объяснить влияние экстремумов.

• Я могу прочесть и интерпретировать данные, представленные в двумерной таблице плотности распределения.

• Я могу интерпретировать и объяснить значения относительной частоты событий в контексте задачи.

• Я могу построить диаграмму разброса данных, нарисовать линию наилучшего приближения и составить уравнение этой линии.

• Я могу использовать функцию наилучшего приближения для составления прогнозов.

• Я могу проанализировать график остатков, чтобы определить, обеспечивает ли функция приемлемое приближение.

• Я могу вычислить (с помощью разных методов) и интерпретировать коэффициент корреляции.

• Я могу определить, что корреляция не подразумевает наличия причинно-следственной связи и что причинно-следственная связь не отражена на диаграмме разброса.

Раздел 7 — многочлены и функции

• Я могу складывать и вычитать многочлены.

• Я могу умножать многочлен на многочлен.

• Я могу разложить многочлен на множители.

• Я могу решать квадратные уравнения методом разложения на множители.

• Я могу построить приближенный график с помощью точек пересечения квадратичной функции с осями координат и других легко определяемых точек.

Раздел 8 — квадратичные функции

• Я могу найти координаты экстремума квадратичной функции, дополнив ее выражение до полного квадрата.

• Я могу построить график квадратичной функции, определив основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения, симметрия и поведение графика функции на границах области определения.

• Я могу определить, как влияет на график функции то или иное преобразование ее формулы.

• Я могу построить диаграмму рассеяния, используя метод наименьших квадратов, и применить его для составления прогнозов.

Раздел 9 — квадратные уравнения

• Я могу объяснить, почему суммы и произведения либо рациональные, либо иррациональные.

• Я могу решать квадратные уравнения методом дополнения до полного квадрата.

• Я могу решать квадратные уравнения методом нахождения квадратных корней.

• Я могу решать квадратные уравнения с помощью формулы определения корней квадратного уравнения.

Раздел 10 — нелинейные соотношения

• Я могу применить свойства степенных функций, чтобы упростить алгебраические выражения с рациональными показателями степени.

• Я могу построить график степенной функции с показателем степени $1/2$ или $1/3$, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения и поведение графика функции на границах области определения.

• Я могу построить график кусочно-ломаной функции, в том

числе ступенчатой и функции модуля, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения и поведение графика функции на границах области определения.

Раздел 11 — показательные функции и уравнения

• Я могу показать, что показательная функция имеет один и тот же множитель при равных интервалах изменения переменной.

• Я могу указать случаи, когда изменение скорости описывается одним и тем же множителем за равные промежутки времени и которые могут быть описаны с помощью показательных функций.

• Я могу использовать графики или таблицы, чтобы сравнить скорость изменения линейной, квадратичной и показательной функций.

• Я могу преобразовать показательную функцию, используя ее свойства.

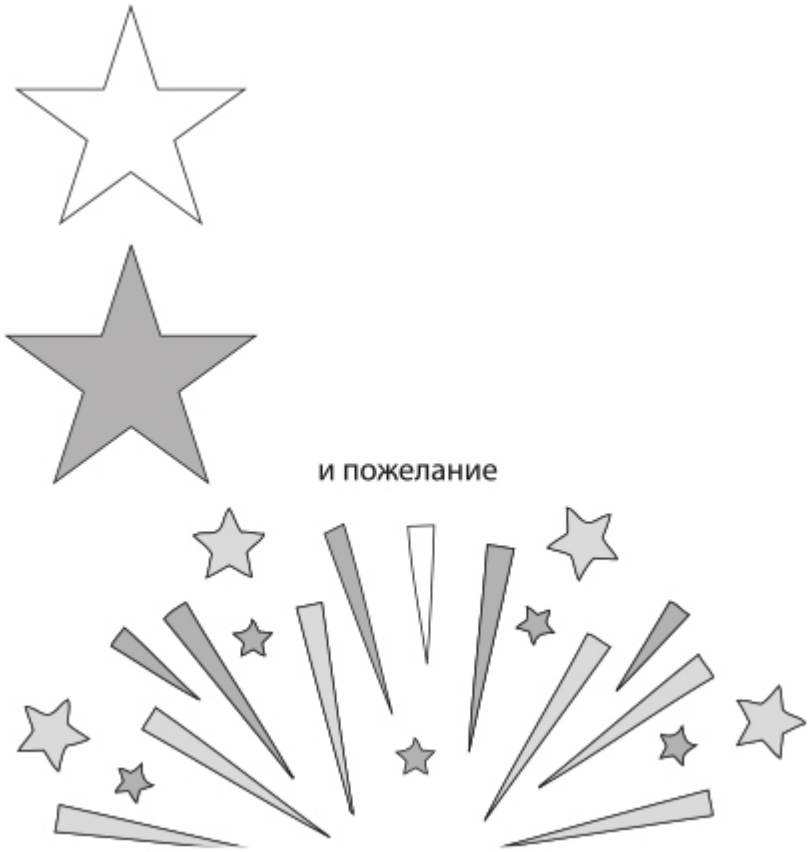
• Я могу использовать параметры показательной функции, взятые из реальной жизни.

• Я могу построить график показательной функции, определив ее основные характеристики: отрезки, отсекаемые на координатных осях, максимальное и (или) минимальное значения, асимптоты и поведение функции на границах области ее определения.

• Я могу построить диаграмму рассеяния, используя показательную функцию в методе наилучшего приближения, и применить ее для составления прогнозов.

Источник: предоставлено Лизой Хенри.

Две звезды и пожелание



Размышления

Над какой интересной концепцией мы работали сегодня?

Что я узнал сегодня?

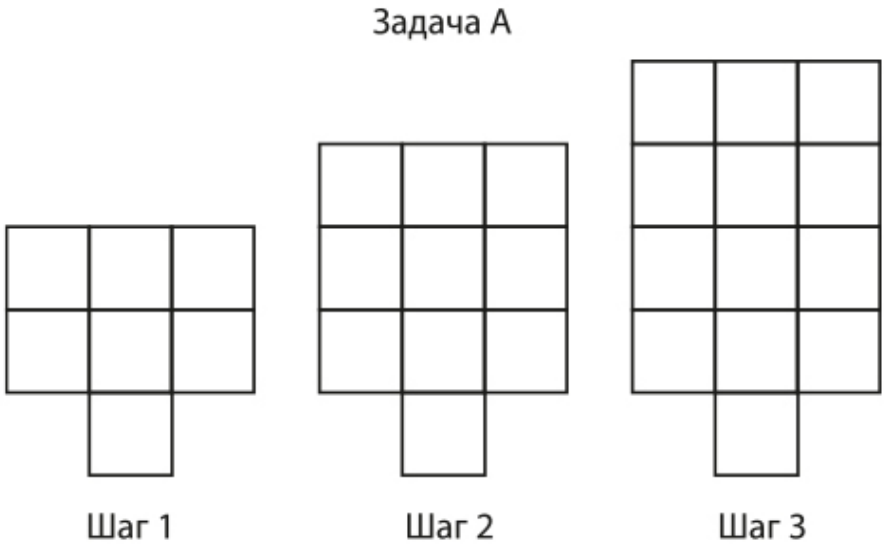
Какие хорошие идеи появились у меня сегодня?

В каких ситуациях я мог бы использовать полученные сегодня знания?

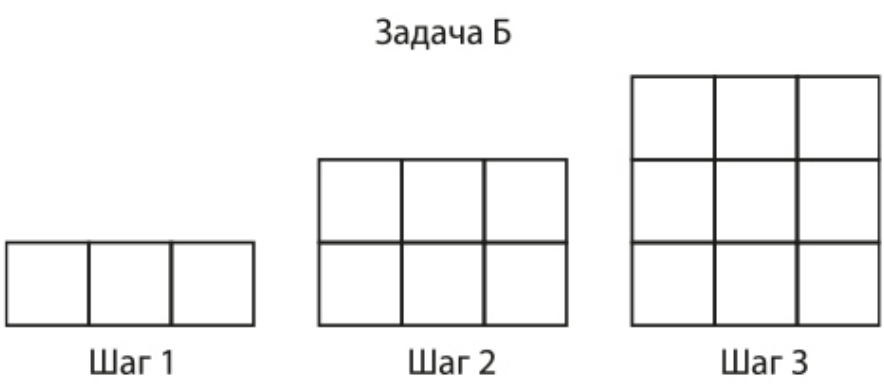
Какие вопросы у меня есть по поводу сегодняшней работы?

Какие новые идеи появились у меня под влиянием этого урока?

Мозаичная задача А по алгебре

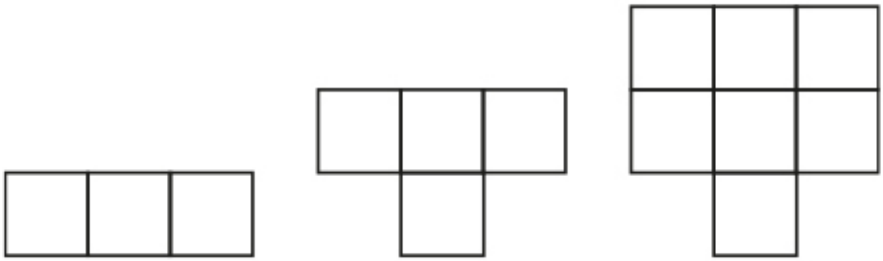


Мозаичная задача Б по алгебре



Мозаичная задача В по алгебре

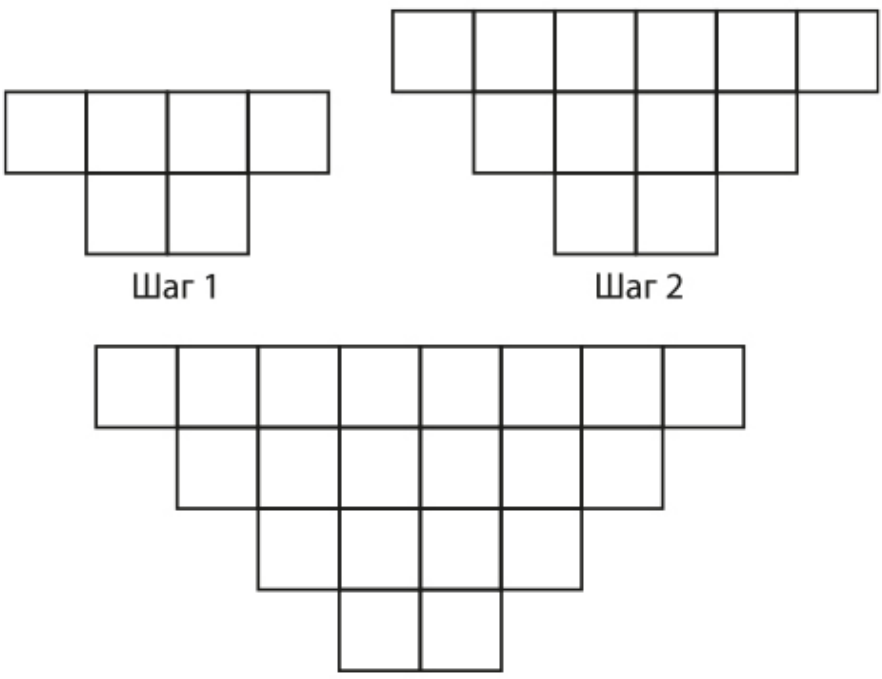
Задача В



Шаг 1 Шаг 2 Шаг 3

Мозаичная задача Г по алгебре

Задача Г



Шаг 1 Шаг 2

Шаг 3

Билет на выход

Билет на выход ___ Имя ___ Дата ___

Три вещи, которые я изучил сегодня...	Две вещи, которые мне показались интересными...	Один вопрос, который у меня есть...

Талон на выход ___ Имя ___ Дата ___

Три вещи, которые я изучил сегодня...	Две вещи, которые мне показались интересными...	Один вопрос, который у меня есть...

Самооценка «Покажите, что вы можете сделать»

Что для нас ценно	Обосновать (в случае необходимости)	
Настойчивость Вы продолжали усердно работать? Вы пробовали что-то еще? Вы задали вопрос? Вы описали, где остановились?		Получилось! Принято
Множество представлений Слова Схемы Графики Таблицы данных Рисунки Диаграммы Более одного решения		Получилось! Принято
Четкие ожидания Вы описали свой процесс размышлений? Как вы получили ответ? Если не получили, на чем вы остановились? Идеи: стрелки, цвет, слова, числа		Получилось! Принято
Результат Вы решили задачу? Если нет, на чем вы остановились? Вы приложили максимум усилий к решению задачи?		Получилось! Принято

Источник: предоставлено Эллен Круз.

Математические цели оценки участия в работе группы

Ваша группа добьется успеха сегодня, если вы будете:

• понимать и описывать закономерности;

• обосновывать ход своих мыслей и применять разные способы представления;

• устанавливать связи между разными подходами и

представлениями;

• использовать слова, стрелки, числа и цветовое кодирование для четкого разъяснения идей;

• ставить вопросы, чтобы понять ход мыслей других членов команды;

• ставить вопросы, чтобы подтолкнуть группу к более глубокому анализу;

• готовить презентацию, чтобы ученики, не входящие в состав вашей группы, могли понять ход ее мыслей.

Никто не может успешно применять все эти методы работы, но каждый способен овладеть некоторыми из них. Необходимо, чтобы все члены вашей группы справились с сегодняшним заданием.

Источник: материал предоставил Карлос Кабана.

Групповые цели оценки участия в работе группы

Во время теста на оценку участия в работе группы я буду наблюдать, как вы:

• склоняетесь над столом и работаете;

• поровну делите время для высказываний;

• поддерживаете друг друга;

• слушаете друг друга;

• задаете друг другу много вопросов;

• отрабатываете свои роли в группе.

Источник: материал предоставил Карлос Кабана.

Собачьи галеты

Сколько существует способов разделить 24 собачьи галеты на две группы?

Сколько существует способов разделить 24 собачьи галеты на равные группы?

Представьте полученный результат в графическом виде, отобразив все комбинации.

Акцент на математических связях

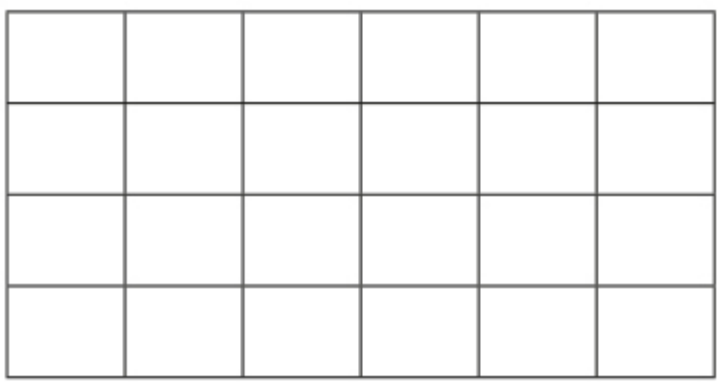
Изобразите дроби $^{3}/_{4}$, $^{6}/_{8}$ и $^{12}/_{16}$ графически.

Представьте эти дроби в виде подобных треугольников.

Чем схожи и чем отличаются эти формы представления дробей — графическая; в виде чисел; в виде треугольников? Можете ли вы применить цветовое кодирование к различным свойствам каждой формы представления, чтобы эти свойства были показаны одним цветом в разных представлениях?

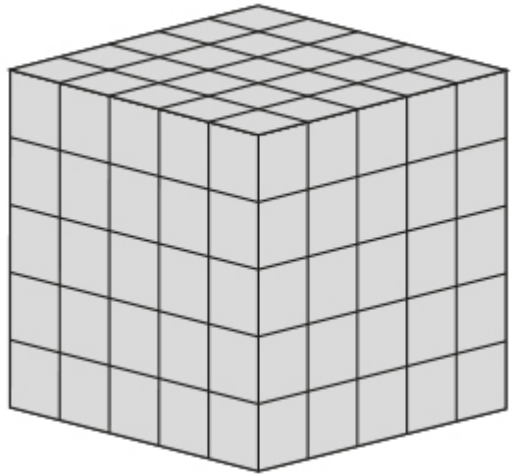
Цветовое кодирование шоколадного пирога

Сэм испек шоколадный пирог, который собирается разрезать на 24 равные части. Он хочет разделить его поровну с 5 своими друзьями. Разделите пирог на части и воспользуйтесь методом цветового кодирования, чтобы показать, сколько кусочков пирога получат Сэм и его друзья.



Раскрашенный куб

Представьте себе куб $5 \times 5 \times 5$, внешние грани которого раскрашены в один цвет, причем этот куб состоит из меньших кубиков размером $1 \times 1 \times 1$.



Дайте ответы на следующие вопросы.

У скольких маленьких кубиков будет 3 раскрашенные грани?

У скольких маленьких кубиков будет 2 раскрашенные грани?

У скольких маленьких кубиков будет 1 раскрашенная грань?

У скольких маленьких кубиков не будет раскрашенных граней?

Привязанный козлик

Представьте себе козлика, привязанного веревкой в углу затененного участка площадью 1 × 2 м. Длина веревки равна 2 м.

Что вы хотите знать об этой ситуации?

Представьте эту ситуацию в виде рисунка.

Какие вопросы у вас возникли?

Солнце восходит на востоке затененного участка и садится на западе. Козлик хотел бы оставаться в тени. Где вам следует посадить дерево? Какое дерево вы посадили бы?

Моделирование распределения мирового богатства

1. Определите долю населения, живущего на каждом континенте, в общей численности населения мира.
2. Вычислите количество учеников вашего класса, соответствующих найденным процентам.
3. Вычислите процент мирового богатства, который приходится на каждый континент.
4. Рассчитайте богатство каждого континента как количество печенья.

Таблица 1. Данные о мировом богатстве

Континент	Население (млн чел.), 2000 г.	Процент населения	Богатство (ВВП, трлн долл.)	Процент богатства
Африка	1136		2,6	
Азия	4351		18,5	
Северная Америка	353		20,3	
Южная Америка	410		4,2	
Европа	741		24,4	
Океания/Австралия	39		1,8	
Всего	7030	100	71,8	100

Источник: данные о численности населения получены на основании информации Справочной службы по вопросам народонаселения (Population Reference Bureau, prb.org). Данные о мировом богатстве получены на основании информации Международного валютного фонда.

Таблица 2. Данные, полученные в классе
Количество учеников в классе ___
Общее количество печенья ___

Континент	Процент населения	Количество учеников в классе	Процент богатства	Количество печенья
Африка				
Азия				
Северная Америка				
Южная Америка				
Европа				
Океания/Австралия				
Всего	100		100	

Источник: предоставлено Шармейн Мэнгем.

Футбольный вратарь

Если вы футбольный вратарь, а нападающий команды противника оторвался от остальных и бежит к вам, какую позицию вам лучше занять? Попытайтесь определить разные

позиции в зависимости от местоположения нападающего в момент, когда он сделает удар.

Мы хотели бы знать

Члены группы:

Дата:

Мы хотели бы знать:

_____

Используйте рисунки, числа и слова, чтобы показать, как вы ответили на этот вопрос.

Мы хотели бы проанализировать:

_____

Используйте рисунки, числа и слова, чтобы показать, как вы ответили на этот вопрос.

Источник: материал предоставил Ник Фут.

Об авторе

Д-р Джо Боулер — профессор математического образования Стэнфордского университета и сооснователь сайта YouCubed. Аналитик тестов PISA Организации экономического сотрудничества и развития, автор первого курса MOOC по теме преподавания и изучения математики. В прошлом Джо была профессором математики как стипендиат Фонда имени Марии Кюри в Англии. Она получила награду за лучшую докторскую диссертацию в Англии, которую присудила ей Британская ассоциация исследований в области образования. Джо Боулер — член Королевского общества покровительства искусствам (Великобритания) и бывший президент международной организации «Женщины и математическое образование». Она получила награду Национального научного фонда, а также награду NCSM имени Кей Джиллиленд. Автор девяти книг и множества научных статей. Выступает в качестве консультанта в нескольких компаниях Кремниевой долины и является докладчиком Белого дома по вопросам обучения девушек и дисциплин STEM. Джо Боулер организовала сайт www.youcubed.org для предоставления учителям и родителям ресурсов и идей, необходимых им для того, чтобы вдохновлять учеников и пробуждать у них интерес к математике.

МИФ Кругозор

Подписывайтесь на полезные книжные письма со скидками и подарками: mif.to/kr-letter

Все расширяющие кругозор книги на одной странице: mif.to/krugozor

#mifbooks

#mifbooks

#mifbooks

#mifbooks

Над книгой работали

Руководитель направления *Ренат Шагабутдинов*
Ответственный редактор *Юлия Потемкина*
Литературный редактор *Ольга Свитова*
Арт-директор *Алексей Богомолов*
Дизайн обложки *Алина Родионова (a-2-o.ru)*
Иллюстратор *Кира Мрик*
Верстка *Екатерина Матусовская*
Корректоры *Лев Зелексон, Олег Пономарев*

ООО «Манн, Иванов и Фербер»
mann-ivanov-ferber.ru
Электронная версия книги подготовлена компанией Webkniga.ru, 2019

notes

Примечания

1

Common Core State Standards (единый комплекс государственных образовательных стандартов) — образовательные стандарты по математическим и языковым дисциплинам, которые внедряются во всех штатах США. *Прим. перев.*

2

Издана на русском языке: Дуэк К. Гибкое сознание. Новый взгляд на психологию развития взрослых и детей. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013.

3

MOOC (massive, open, online class) — массовый открытый онлайн-курс. *Прим. перев.*

4

Подробнее см.: http://www.today.com/id/36032653/ns/today-today_health/t/meet-girl-half-brain/#.UeGbixbfvCE.

5

PISA (Program for International Student Assessment) — международная программа по оценке образовательных достижений учащихся. *Прим. перев.*

6

STEM (science, technology, engineering, and math) — естественные науки, технологии, инженерное дело, математика. *Прим. перев.*

7

Чартерная школа — бесплатная муниципальная школа, работающая по контракту: частично она финансируется государством, а частично — за счет частных средств. *Прим. ред.*

8

Common Core State Standards (единый комплекс государственных образовательных стандартов) — образовательные стандарты по математическим и языковым дисциплинам, которые внедряются во всех штатах США. *Прим. перев.*

9

Подробнее о программе Project for Education Research That Scales, или PERTS, см.: https://www.perts.net.

10

TED (Technology, Entertainment, Design — технологии, развлечения, дизайн) — частный некоммерческий американский фонд и одноименные ежегодные конференции, проводимые с 1984 года в Калифорнии. Темы конференций — наука, искусство, дизайн, политика, бизнес, культура, международные проблемы, технологии и развлечения. *Прим. ред.*

11

Издана на русском языке: Гладуэлл М. Гении и аутсайдеры. М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016.

12

Математическая и логическая головоломка, в которой нужно заполнить сетку цифрами так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце они не повторялись. Число в углу каждого выделенного блока — результат арифметической операции над цифрами в этом блоке. Цифры внутри блока могут повторяться. *Прим. ред.*

13

California Standards Tests — тесты на оценку уровня знаний в соответствии со стандартами штата Калифорния.

14

Повторный курс математики в старшей школе, включающий выражения, системы уравнений, функции, неравенства, показательные степени и т. д. *Прим. ред.*

15

General Certificate of Secondary Education grade — экзамен на получение аттестата об общем среднем образовании. *Прим. перев.*

16

В Великобритании используется восьмибалльная шкала оценок, от A до G, где максимальная оценка — A, а минимальная — G. Учитывается успеваемость за весь семестр (максимум можно набрать 100 баллов), для получения максимальной оценки необходимо, чтобы сумма баллов за семестр составила 90 и более. *Прим. ред.*

http://www.nationalstemcentre.org.uk/elibrary/collection/44/smile-cards.

18

College Preparatory Mathematics — подготовительный курс математики для поступления в колледж. *Прим. перев.*

19

TIMSS (Trends in Mathematics and Science Study) — международное исследование качества математического и естественно-научного образования. *Прим. перев.*